

Tentamen i Envariabelanalys 2

2023-06-03 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 kring $x = 1$ till funktionen

$$f(x) = e^{3x},$$

med restterm i ordoform (ordning 3).

- (b) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}}{\sin x^3}.$$

- (c) Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{1/x} - 1 - \sin \frac{1}{x} \right).$$

2. (a) Lös differentialekvationen $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$. (1p)

- (b) Lös integralekvationen

$$y = 2 + \int_0^x y(t)^2 t dt$$

och ange största möjliga öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens: $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} dx$.
- (b) Visa att $\int_1^\infty \frac{x + |\sin x|}{x^4 + \sqrt{x}} dx \leq 1$.
- (c) Avgör konvergens: $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{k}}}{\arctan \frac{1}{k}}$.
4. (a) Bestäm arean av området D som i polära koordinater ges av $0 \leq r \leq \varphi^2$ och $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna
- $$0 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq e^x,$$
- roterar ett varv kring linjen $y = -1$.
- Inkludera en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)
-

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ av högst grad 6 så att

$$\left| \int_0^1 (\sqrt{1+x^3} - p(x)) dx \right| \leq \frac{1}{160}.$$

6. Lös differentialekvationen

$$(2 + x^2)y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

med potensserieansats. Ange de tre första nollskilda termerna i serien, ett samband mellan seriens övriga koefficienter samt seriens konvergensradie.
