Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2023-08-24 kl 08.00–13.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3p var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3p var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 15.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\arctan(x^2)-\sqrt{1+2x^2}}{x^4}.$$

(1p)

(b) Bestäm Maclaurinutvecklingen av $f(x) = \sin x$ av ordning 2 med restterm i Lagranges form (ordning 3), och visa sedan att

$$\left|\sin\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right| \leq \frac{1}{6000}.$$

(2p)

2. (a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' - \frac{\sin x}{2+\cos x} y = x.$$

(b) (**Endast svar på (b)**) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - y' - 6y = 6x^2 + 2x - 2.$$

(c) Lös integralekvationen

$$y(x) + \int_0^x y(t)\,dt = 2.$$

Var god vänd!

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+1/x)}{x}\,dx.$

   (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\pi/2-\arctan k).$

   (c) Bestäm konvergensradien R för $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 3^k x^{2k}.$

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av parameterkurvan

$$x(t) = (t-1)e^t, \quad y(t) = t^2+2, \quad 1 \le t \le 3.$$

(1p)

   (b) Beräkna arean av den yta som uppstår när kurvan

$$y = x^3 - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

   roterar ett varv kring linjen $y = -1$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Del B

5. Visa att integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ är absolutkonvergent, samt att

$$-2 \le \int_0^\infty \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx \le 4.$$

6. Bestäm koefficienterna c_n sådana att $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uppfyller

$$xy(x) - 3\int_0^x y(t)\,dt = \frac{x}{1-x} - x^3 \text{ för alla } |x| < 1$$

   med bivillkoret

$$y''(0) = 2,$$

   samt visa att den framtagna potensserien har konvergensradie 1.
