Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2024-01-03 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng totalt.

Svar finns tidigast kl 21.00 på kursens hemsida.

Del A

1. (a) Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\arctan x}.$$
   (b) Avgör om
$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2\ln(1-x) - x^2$$
   har lokal extrempunkt i $x = 0$, och ange i så fall vilken typ.

   (c) Bestäm Maclaurinutvecklingen av funktionen
$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$
   med rest $\mathcal{O}(x^6)$.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{-x} + \cos x.$$

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x+1)-\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

   (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos k\pi}{\arctan k}.$

   (c) Visa att $\displaystyle\frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^\infty \frac{2^k}{3^k+4^k} \le 1.$

Var god vänd!

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, arean som uppstår då kurvan

$$y = \ln x, \quad \mathrm{e} \leq x \leq \mathrm{e}^2,$$

roterar ett varv kring linjen $y = -2$. (1p)

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \quad 1 \leq y \leq 2\cos x,$$

roterar ett varv kring linjen $x = -1$. (2p)

Inkludera principskisser som motiverar formlerna som används i (a) och (b).

Del B

5. Bestäm ett polynom $p(x)$ sådant att

$$\left|\ln(1+x) - p(x)\right| \leq \frac{1}{300}, \qquad |x| \leq \frac{1}{4}.$$

6. Bestäm en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$2\,y(x) + \int_0^x \frac{9\tan t}{1+y(t)}\,dt = -8.$$

Ange också största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning.
