Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: 9GMA04
Modul: STN1

(Förklarande text i rött kommer inte att finnas med på de riktiga tentorna.)

Nedanstående regler gäller fr.o.m. mars 2024. (Själva tentan är den som gick i mars 2023.)

Använd denna tenta mest till att få en detaljerad förklaring av hur godkända frivilliga digitala kontrollskrivningar (KTR) tillgodoräknas.

Tentamen i Matematik: Envariabelanalys 2

2024-??-?? kl ??.00–13.??

Inga hjälpmedel. Fullständiga lösningar krävs, om inget annat sägs i uppgifterna.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 4 uppgifter, numrerade 1–4, värda 3 poäng var.
- **Del B** består av 2 uppgifter, numrerade 5–6, värda 3 poäng var.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2 poäng.

För godkänd tentamen (**betyg G/VG**) räcker krav K1 och K2, där

K1: 1 poäng på uppgift n eller – men inte för överbetyg – KTRn godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).
Godkänd KTRn är i första hand en försäkring som gör att ni inte blir underkända på hela tentan ifall ni får 0 poäng på uppgift n; ni kan dock inte få överbetyg i så fall.

(Till följd av ett centralt beslut om att införa bedömningskriterier i alla våra kurser måste vi examinatorer kräva att ni presterar något inom varje del av kursen.)

Observera att godkänd KTRn inte ger någon extra poäng på uppgift n. Det är fortfarande det ni presterar på själva tentan som avgör poängen på uppgift n.

K2: 3/5 godkända uppgifter och 8/14 poäng totalt, där 1/2 bonuspoäng upp till 8 poäng för betyg G erhålls vid behov om 2/4 KTR är godkända..
Förutsatt att ni har 3 godkända uppgifter (och uppfyller krav K1) kan godkända KTR således ge extra poäng ifall ni inte har nått upp till 8 poäng.

Svar finns tidigast xxxxxx på kursens hemsida.

Del A

Här på del A hör uppgifterna till specifika delar av kursen: uppgift 1 tas från kapitel 8, uppgift 2 från kapitel 9, uppgift 3 från kapitel 10 och uppgift 4 från kapitel 7. Uppgifterna här *kan*, men *måste inte*, vara uppdelade.

Ni får som sagt inte nolla uppgift n om ni inte har KTRn godkänd ($n = 1, 2, 3, 4$).

1. (a) Härled Maclaurinutvecklingen av ordning 2 till funktionen

$$f(x) = \sqrt{1+x},$$

med restterm i Lagranges form (ordning 3).

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - x - \cos x}.$$

(c) Bestäm Maclaurinutvecklingen till

$$f(x) = \sqrt{1 + \arctan x}$$

av ordning 3 med restterm på ordoform (av ordning 4).

2. (a) Lös differentialekvationen

$$y' - 3x^2 y = 8x\,\mathrm{e}^{x^3}$$

med bivillkoret $y(0) = 2$. (1p)

(b) Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y' - x\,\mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0,$$

och ange största öppna intervall där $y(x)$ är en lösning. (2p)

3. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2x}{4x^5+1}\,dx$.

(b) Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}$.

(c) Bestäm konvergensradien R till potensserien

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{8^k k}{k^2+100}\, x^{3k}.$$

(OBS! Ändpunkterna $x = \pm R$ ska alltså ej undersökas.)

4. (a) Teckna som en integral, som inte ska beräknas, längden av kurvan

$$y = \frac{x^4}{4} - 7, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

(1p)

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2 + x^3,$$

roterar ett varv kring linjen $x = -1$.
Inkludera en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)

Var god vänd!

Del B

Här på del B kan uppgifterna tas från hela kursen, utan någon särskild ordning. Uppgifterna här är i regel lite svårare eller mera teoretiska.

5. Beräkna summan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\,2^n}.$$

6. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen
$$y''' - y'' - y' + y = -x^3 + 3x^2 + 6x - 5$$
som har lokalt minimum i $x = 0$.
