Envariabelanalys 2, Föreläsning 16

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Taylor- och Maclaurinutvecklingar

- Taylors/Maclaurins formel
- Restterm på ordoform
- Standardutvecklingar
- Ordokalkyl
- Gränsvärden av kvoter
- Lokala extrempunkter
- Lagranges restterm

Exempel

Beräkna följande gränsvärde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}.$$

Lösning

Standardutvecklingen

$$(1+t)^{1/3} = 1 + \binom{1/3}{1} t + \binom{1/3}{2} t^2 + \mathcal{O}(t^3) = 1 + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + \mathcal{O}(t^3)$$

med $t = 3x$ ger (notera att $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$), tillsammans med standardutvecklingen för e^x,

$$\begin{aligned}
&\frac{e^x - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} \\
&= \frac{\left(1 + x + x^2/2! + \mathcal{O}(x^3)\right) - \left(1 + x - x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)}{x^2} = \frac{3}{2} + \mathcal{O}(x) \\
&\to \frac{3}{2} \text{ då } x \to 0.
\end{aligned}$$

Exempel

Låt $f(x) = (x-1)^2 \ln x$.

(a) Bestäm Taylorutvecklingen till $f(x)$ av ordning 3 kring $x = 1$ med restterm på ordoform (restterm av grad 4). (1p)

(b) Avgör om $f(x)$ har en lokal extrempunkt i $x = 1$ (och ange i så fall vilken typ). (1p)

(c) Visa att $|f(x) - p(x)| \leq 10^{-4}$ om $|x-1| \leq 10^{-1}$, där $p(x)$ är *Taylorpolynomet* av grad 3 till $f(x)$ i $x = 1$. (1p)

Lösning (a)

Direkt lösning med Taylors formel:
$f(x) = (x-1)^2 \ln x,\ f(1) = 0,$
$f'(x) = 2(x-1)\ln x + (x-1)^2/x,\ f'(1) = 0,$
$f''(x) = 2\ln x + 4(x-1)/x - (x-1)^2/x^2,\ f''(1) = 0,$
$f'''(x) = 6/x - 6(x-1)/x^2 + 2(x-1)^2/x^3,\ f'''(1) = 6.$
Taylors formel säger nu att

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4)$$

$$= (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).$$

Lösning (a)

Alternativ lösning via entydighetssatsen+standardutveckling av $\ln(1+t)$:
Med $x = 1 + t$ får vi

$$f(x) = f(1+t) = t^2 \ln(1+t) = t^2(t + \mathcal{O}(t^2))$$

$$= t^3 + \mathcal{O}(t^4) = (x-1)^3 + \mathcal{O}((x-1)^4).)$$

Lösning (b)

Eftersom
$$f(x) - f(1) = (x-1)^3(1 + \mathcal{O}(x-1)),$$
så ser vi att differensen $f(x) - f(1)$ växlar tecken när vi går från $x < 1$ till $x > 1$ ($(x-1)^3$ växlar tecken medan $1 + \mathcal{O}(x-1)$ inte gör det nära $x = 1$).

Svar: $x = 1$ är ingen extrempunkt.

Lösning (c)

Vi ska visa att $|f(x) - p(x)| = |f(x) - (x-1)^3| \leq 10^{-4}$ om $|x-1| \leq 10^{-1}$.

Eftersom $g(x) = \ln x$ uppfyller $g(1) = 0$, $g'(x) = 1/x$, $g'(1) = 1$ samt $g''(x) = -1/x^2$ får vi från Taylors sats med Lagranges restterm att

$$f(x) = (x-1)^2 \ln x = (x-1)^2 \left(g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(\xi)}{2}(x-1)^2 \right)$$

$$= (x-1)^3 - \frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4,$$

där ξ ligger mellan x och 1.

Lösning (c)

Så om $p(x)$ betecknar Taylorpolynomet av ordning 3 till $f(x)$ i 1 har vi

$$|f(x) - p(x)| = \left| -\frac{1}{2\xi^2}(x-1)^4 \right| = \frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4.$$

Notera nu att $|x-1| \leq 10^{-1}$ är samma sak som att $0.9 \leq x \leq 1.1$, så $\xi \geq 0.9$, vilket ger oss uppskattningen:

$$\frac{1}{2\xi^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}|x-1|^4 \leq \frac{1}{2 \cdot 0.9^2}10^{-4} \leq 10^{-4},$$

om $|x-1| \leq 10^{-1}$.

Differentialekvationer

- Första ordnings linjära differentialekvationer
- Första ordnings separabla differentialekvationer
- Högre ordnings linjära med konstanta koefficienter.
- Reducera integralekvationer till DE+BV.

OBS! måste kunna formeln för homogenlösningar till högre ordningens ODE, inklusive på reell form då vi har komplexa rötter till den karaktäristiska ekvationen. Måste också kunna göra rätt partikuläransatser för de olika fallen vi har i denna kurs.

Exempel

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$(2 + \cos x)y' - (\sin x)y = 4\,\mathrm{e}^{2x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 4$.

Lösning

Eftersom $2+\cos x > 0$ kan vi skriva om differentialekvationen till den ekvivalenta formen

$$(*) \qquad y' + \frac{-\sin x}{2+\cos x} y = \frac{4e^{2x}}{2+\cos x}.$$

Koefficienten för y är $g(x) = (-\sin x)/(2+\cos x)$, med en primitiv $G(x) = \ln(2+\cos x)$ (sätt $t = \cos x$, t.ex.).
Så en integrerande faktor är $e^{G(x)} = \exp\big(\ln(2+\cos x)\big) = 2+\cos x$.
Multiplikation av ekvationen $(*)$ med denna ger nu

$$((2+\cos x)y)' = (2+\cos x)y' - (\sin x)y = 4e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+\cos x)y = 2e^{2x} + C.$$

Bivillkoret $y(0) = 4$ ger $(2+1)\cdot 4 = 2 + C$, d.v.s. $C = 10$, och därmed $y = (2e^{2x}+10)/(2+\cos x)$.

Svar: $y = \dfrac{2e^{2x}+10}{2+\cos x}$.

Exempel

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 4 - 13x + 40\cos x$$

som uppfyller $y(0) = 5$.

Homogenlösning

Karakteristiskt polynom
$r^3 - 3r^2 + 9r + 13 = (r+1)(r^2 - 4r + 13) = \big(r+1\big)\big((r-2)^2 + 3^2\big)$,
med nollställena $r_1 = -1$, $r_{2,3} = 2 \pm 3i$.
Homogenlösningen blir därför

$$y_h = Ae^{-x} + e^{2x}(B\cos 3x + C\sin 3x).$$

Partikulärlösning

För att finna en partikulärlösning y_p delar vi upp högerledet enligt $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, där $h_1(x) = 4 - 13x$ och $h_2(x) = 40 \cos x$, och söker partikulärlösningar till var och en av dessa.

y_{p1}

Ansatsen $y_{p1} = ax + b$ ger $y'_{p1} = a$ samt $y''_{p1} = 0 = y'''_{p1}$,
ger

$$y'''_{p1} - 3y''_{p1} + 9y'_{p1} + 13y_{p1} = 9a + 13(ax + b) = 13ax + (9a + 13b),$$
$$= 4 - 13x.$$

Detta ger $a = -1$ och $b = 1$; således duger $y_{p1} = -x + 1$.

y_{p2}

Ansatsen $y_{p2} = a\cos x + b\sin x$ ger $y'_{p2} = -a\sin x + b\cos x$, $y''_{p2} = -a\cos x - b\sin x$ och $y'''_{p2} = a\sin x - b\cos x$, och därmed får vi

$$y'''_{p1} - 3y''_{p1} + 9y'_{p1} + 13y_{p1} = (16a + 8b)\cos x + (-8a + 16b)\sin x = 40\cos x.$$

Detta ger $16a + 8b = 40$ och $-8a + 16b = 0$, d.v.s. $a = 2$ och $b = 1$; $y_{p2} = 2\cos x + \sin x$ duger därför.

Allmän lösning

Linjäriteten ger att alla lösningar till differentialekvationen ges av

$$y = y_h + y_p = y_h + (y_{p1} + y_{p2})$$

$$= Ae^{-x} + e^{2x}(B\cos 3x + C\sin 3x) - x + 1 + 2\cos x + \sin x.$$

Bivillkor

Bivillkoret ger nu

$$y(0) = Ae^{-0} + e^{2\cdot 0}(B\cos(3\cdot 0) + C\sin(3\cdot 0)) - 0 + 1 + 2\cos 0 + \sin 0$$

$$= A + B + 3 = 5.$$

D.v.s.

$$B = 2 - A.$$

<u>Svar</u>:
$y = Ae^{-x} + e^{2x}((2-A)\cos 3x + C\sin 3x) - x + 1 + 2\cos x + \sin x$,
$A, C \in \mathbb{R}$.

Exempel

Hitta en lösning till

$$y' + yy' - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} = 0$$

sådan att $y(0) = -3$.

Lösning

$$y' + yy' - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow (1+y)y' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

Ekvationen är alltså separabel och vi integrerar nu bägge sidor:

$$\int (1+y)dy = \int \frac{1}{2}\mathrm{e}^x dx$$

vilket ger

$$y + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + C) \Leftrightarrow y^2 + 2y = \mathrm{e}^x + C.$$

Bivillkoret ger nu $y(0)^2 + 2y(0) = 9 - 6 = 3 = \mathrm{e}^0 + C$, d.v.s. $C = 2$.

Lösning

Ekvationen

$$y^2 + 2y = \mathrm{e}^x + 2$$

har lösningarna

$$y = -1 \pm \sqrt{3 + \mathrm{e}^x},$$

men bivillkoret ger att den sökta lösningen är

$$y = -1 - \sqrt{3 + \mathrm{e}^x}.$$

Notera att denna löser ekvationen för alla $x \in \mathbb{R}$.

Svar: $y = -1 - \sqrt{3 + \mathrm{e}^x}, \; -\infty < x < \infty.$

Serier och generaliserade integraler

- Jämförelseprinciper för positiva serier/generaliserade integraler på de två olika formerna (uppskattning respektive gränsvärde av kvot).
- Absolutkonvergenta serier/generaliserade integraler.
- Förhållandet mellan generaliserade integraler och serier för avtagande funktioner (samt uppskattning av sådana serier med integraler).
- Divergenstest för serier.
- Geometriska serier.
- Leibniz kriterium för alternerande serier.
- Potensserier och dess konvergensradier (rot/kvot–kriteriet)+kontroll av ändpunkterna.
- Potensserieansatser till differentialekvationer.
- Maclaurinserier. Beräkningar med derivator/integraler av den geometriska serien.

Exempel

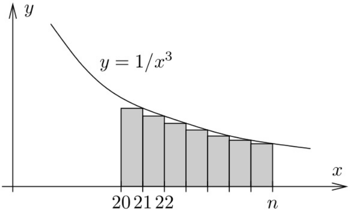
(a) Visa att $\displaystyle\sum_{k=21}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{800}$. (1p)

(b) Bestäm alla reella x sådana att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)}\, x^{2k}$ konvergerar. (2p)

Lösning (a)

För varje heltal $n \geq 21$ har staplarna i figuren sammanlagd area

$$\frac{1}{21^3} \cdot 1 + \frac{1}{22^3} \cdot 1 + \ldots + \frac{1}{n^3} \cdot 1 = \sum_{k=21}^{n} \frac{1}{k^3},$$



och denna area är uppenbarligen mindre än arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = 1/x^3$ från $x = 20$ till $x = n$.

Lösning (a)

Så

$$\sum_{k=21}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \int_{20}^{n} \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{20}^{n} = \frac{1}{800} - \frac{1}{2n^2}.$$

Delsummorna till den positiva serien $\sum_{k=21}^{\infty}(1/k^3)$ är därmed uppåt begränsade av $1/800$.

Serien är därför konvergent, och

$$\sum_{k=21}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{800},$$

vilket skulle bevisas.

Lösning (b), Konvergensradie

Sätt $a_k = (\ln k)^2 x^{2k}/4^k(k-1)$ för fixt x. Rotkriteriet ger

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|^2}{4} \cdot \sqrt[k]{\frac{(\ln k)^2}{k-1}} = \frac{|x|^2}{4} \cdot \exp\left(\frac{2\ln(\ln k) - \ln(k-1)}{k}\right)$$

$$\to \frac{|x|^2}{4} \cdot e^0 = \frac{|x|^2}{4} = Q \text{ då } k \to \infty.$$

Serien är absolutkonvergent om $Q < 1$, d.v.s. om $|x| < 2$, men divergent om $Q > 1$, d.v.s. om $|x| > 2$.
Således är konvergensradien $R = 2$.

Lösning (b), Ändpunkter

Det återstår att undersöka ändpunkterna $x = \pm R = \pm 2$.
Där får vi, i båda punkterna, samma positiva serie:

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} (\pm 2)^{2k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{k-1}.$$

Eftersom $\ln k \geq \ln 3 > 1$ och $0 < k-1 < k$ då $k \geq 3$ får vi uppskattningen

$$a_k = \frac{(\ln k)^2}{k-1} \geq \frac{1}{k}, \qquad k \geq 3.$$

Den positiva serien $\sum_{k=3}^{\infty}(1/k)$ är divergent eftersom den är en svans till den divergenta standardserien $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)$.
Eftersom $a_k \geq 1/k$ är även $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ divergent, enligt jämförelsekriteriet för positiva serier.

<u>Svar</u>: Potensserien konvergerar om och endast om $-2 < x < 2$.

Exempel

Avgör konvergens:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tan \frac{1}{k}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\, dx$

Lösning (a)

Sätt $a_k = k \sin \dfrac{1}{k}$. Vi ser att $a_k = \dfrac{\sin(1/k)}{1/k} \to 1$ då $k \to \infty$ enligt standardgränsvärde, så $a_k \not\to 0$ då $k \to \infty$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är därför **divergent**, enligt Divergenstestet.

Lösning (b)

Sätt $a_k = (-1)^k \tan \dfrac{1}{k}$. Eftersom $\tan \dfrac{1}{k} > 0$ då $k \geq 1$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ alternerande, och eftersom dessutom $|a_k| = \tan \dfrac{1}{k} \searrow 0$ då $k \to \infty$ ($|a_k|$ *avtar* mot noll, d.v.s. $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots$ och $|a_k| \to 0$) är serien en Leibnizserie, och därmed **konvergent**.

Lösning (c)

Notera att integralen endast är generaliserad i 0.
Vi har

$$0 \leq \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\left(1-x^2/2+\mathcal{O}(x^4)\right)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1/2+\mathcal{O}(x^2)}.$$

Vi jämför med $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ som är divergent (standardintegral).
Eftersom

$$\frac{1/(1-\cos x)}{1/x^2} = \frac{1}{1/2+\mathcal{O}(x^2)} \to 2 \qquad \text{då } x \to 0^+ (0 < 2 < \infty),$$

så säger jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,dx$ är **divergent**.

Integraltillämpningar

- Kurvlängd
- Plan area
- Rotationsvolym (skiv– och cylinderformeln)
- Rotationsarea

OBS! För rotationsvolymer/areor måste man kunna göra principskisser som motiverar integralformeln som används.

Exempel

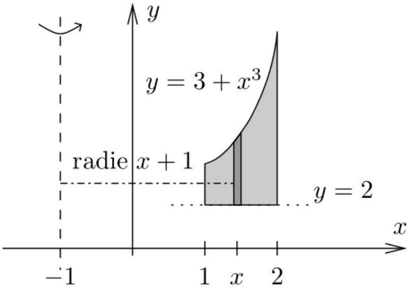
Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området givet av

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{och} \quad 2 \leq y \leq 3 + x^3$$

roteras ett varv kring linjen $x = -1$. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

Lösning

Den tunna stapeln vid x (mörkare ton i figuren) har höjd $(3 + x^3) - 2 = 1 + x^3$ och bredd dx, och genererar vid rotationen ett tunt rör med radie $x - (-1) = x + 1$ och tjocklek dx; röret har därför volym $dV(x) = 2\pi(x + 1)(1 + x^3)\,dx$.



Lösning

Hela rotationskroppens volym blir

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 dV(x) = \int_1^2 2\pi(x+1)(1+x^3)\,dx \\
&= 2\pi \int_1^2 (x^4 + x^3 + x + 1)\,dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\
&= 2\pi \left(\frac{31}{5} + \frac{15}{4} + \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{249\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

<u>Svar</u>: $\frac{249\pi}{10}$.

Exempel

Betrakta kurvan $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$.

(a) Beräkna längden av kurvan. (1p)

(b) Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår när kurvan roterar ett varv kring linjen $x = 2$. (2p)

För full poäng på del (b) krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

Lösning, bågelement ds

Bågelementet är, när vi använder x som en växande parameter,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \Big/ \frac{dy}{dx} = x^{1/2} \Big/ = \sqrt{1+x}\, dx = ds(x).$$

Lösning (a)

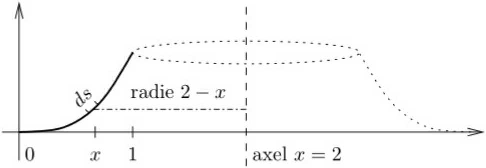
Kurvans längd är

$$L = \int_0^1 ds(x) = \int_0^1 (1+x)^{1/2}\,dx = \left[\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

<u>Svar</u>: $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

Lösning (b)

När bågelementet $ds = ds(x)$ vid x roterar kring axeln $x = 2$ skapar det ett cirkulärt band med radie $r(x) = 2 - x$ och sned kantlängd $ds(x)$ och därmed area $dA(x) = 2\pi r(x)\, ds(x)$.



Vi får därför att arean av rotationsytan är

$$A_{\mathrm{rot}} = \int_0^1 2\pi(2-x)\, ds(x) = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1+x)^{1/2}\, dx$$

$$= \Big/\, t = 1 + x \,\Big/ = 2\pi \int_1^2 (3t^{1/2} - t^{3/2})\, dt = 2\pi \left[\frac{3t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2} \right]_1^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{8\pi}{5}(3\sqrt{2} - 2)}}.$$