Exempel: Avgör konvergens

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x^4}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+2x^4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,dx$

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x^4}}\,dx$

Positiv integrand

Gen. i 0.

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+x^4}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^3}} \text{ då } x \approx 0.\right)$

Vi jämför med $\displaystyle\int_0^1 1/x^{3/2}\,dx$ som är divergent.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/\sqrt{x^3+x^4}}{1/x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+x^4}} = 1 \qquad (0<1<\infty)$$

Så int. är <u>divergent</u>.

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+2x^4}\,dx =$

Pos. integrand.
Gen i 0 och ∞.

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+2x^4}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+2x^4}\,dx}_{B}$$

A: Vi jmf med $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ som ä konv.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1/(\sqrt{x}+2x^4)}{1/x^{1/2}} = \ldots = 1 \quad (0<1<\infty). \quad A \text{ konv.}$$

B: Vi jmf. med $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ som ä konv.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/(\sqrt{x}+2x^4)}{1/x^4} = \frac{1}{2} \quad \left(0 < \frac{1}{2} < \infty\right).$$ B konv.

SVAR: Konvergent.

(c) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,dx$

Int. växlar tecken.
Gen i ∞.
Vi kollar abs. konv.

Eftersom $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$ och

$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ är konv., så $\underbrace{\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx}_{\text{konv.}} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx < \infty$

Alltså är int. abs. konv. och därmed konvergent.