Exempel

Lös ekvationen

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 0$$

med potensserieansats. I svaret skall anges (minst) fyra nollskilda koefficienter, rekursionsformeln för seriens koefficienter och potensseriens konvergensradie.

Lösning

Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$.

Lösning

Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$.
Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k.$$

Lösning

Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$.
Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k.$$

Alltså måste

$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}\right) x^k.$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att

$$c_2 = c_4 = c_6 = \cdots = 0.$$

För udda index ser vi att

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1 && (1)\\
c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} && (2)\\
c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15} && (3)\\
c_7 &= \frac{2c_7}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{8}{105} && (4)\\
&\vdots && (5)\\
c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. && (6)
\end{aligned}
$$

För udda index ser vi att

$$
\begin{align}
c_1 &= 1 \tag{1}\\
c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \tag{2}\\
c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15} \tag{3}\\
c_7 &= \frac{2c_7}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{8}{105} \tag{4}\\
&\vdots \tag{5}\\
c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \tag{6}
\end{align}
$$

Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

då de jämna termerna försvinner.

Konvergensradien kan vi enklast finna med kvottestet:

$$\left|\frac{c_{2(k+1)+1}x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1}x^{2k+1}}\right| = \left|\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}}\right| |x|^2 = \left|\frac{2}{2k+3}\right| |x|^2 \to 0,$$

Konvergensradien kan vi enklast finna med kvottestet:

$$\left|\frac{c_{2(k+1)+1}x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1}x^{2k+1}}\right| = \left|\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}}\right| |x|^2 = \left|\frac{2}{2k+3}\right| |x|^2 \to 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan.

Konvergensradien kan vi enklast finna med kvottestet:

$$\left|\frac{c_{2(k+1)+1}x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1}x^{2k+1}}\right| = \left|\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}}\right| |x|^2 = \left|\frac{2}{2k+3}\right| |x|^2 \to 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan.
Konvergensradien är således oändlig.

Konvergensradien kan vi enklast finna med kvottestet:

$$\left|\frac{c_{2(k+1)+1}x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1}x^{2k+1}}\right| = \left|\frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}}\right| |x|^2 = \left|\frac{2}{2k+3}\right| |x|^2 \to 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan.

Konvergensradien är således oändlig.

Svar: $y(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{8x^7}{105} + \cdots,\ R = \infty.$