Generaliserade integraler

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Generaliserade integraler med positiv integrand.

Generaliserade integraler med positiv integrand.

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$ nedan.
Vi ska se på integraler på formen

$$\int_a^b f(x)dx,$$

där f är kontinuerlig och ≥ 0 på $]a, b[$.

Jämförelseprincipen

Jämförelseprincipen

Sats (Jämförelseprincipen)

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *och* g *är generaliserat integrabel på* $]a, b[$ *då gäller att även* f *är generaliserat integrabel på* $]a, b[$ *med*

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Jämförelseprincipen

Sats (Jämförelseprincipen)

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *och* g *är generaliserat integrabel på* $]a, b[$ *då gäller att även* f *är generaliserat integrabel på* $]a, b[$ *med*

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Jämförelseprincipen på gränsvärdesform

Jämförelseprincipen på gränsvärdesform

Sats

Antag att $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ *och att integralerna* $\int_a^b f(x)dx$ *och* $\int_a^b g(x)dx$ *båda är generaliserade endast i b. Om*

$$0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

då är antingen båda integralerna konvergenta eller divergenta.

Jämförelseprincipen på gränsvärdesform

Sats

Antag att $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ *och att integralerna* $\int_a^b f(x)dx$ *och* $\int_a^b g(x)dx$ *båda är generaliserade endast i* b*. Om*

$$0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

då är antingen båda integralerna konvergenta eller divergenta.

Givetvis gäller en motsvarande sats om integralerna endast är generaliserade i a.

Jämförelseprincipen på gränsvärdesform

Sats

Antag att $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ *och att integralerna* $\int_a^b f(x)dx$ *och* $\int_a^b g(x)dx$ *båda är generaliserade endast i* b*. Om*

$$0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

då är antingen båda integralerna konvergenta eller divergenta.

Givetvis gäller en motsvarande sats om integralerna endast är generaliserade i a.
$\int_a^b f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow \int_c^b f(x)dx$ konvergent för något $a \leq c < b$, om endast generaliserad i b.
Om $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ gäller $f(x) \approx Kg(x)$ nära b.

Jämförelsefunktioner/Jämförelseintegraler

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent om $\alpha < 1$, och divergent annars.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent om $\alpha < 1$, och divergent annars.
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent om $\alpha > 1$, och divergent annars.