Högre ordnings linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Differentialoperatorer

Differentialoperatorer

D: $Dy = y', D^2y = D(Dy) = D(y') = y''$ och så vidare.

Differentialoperatorer

D: $Dy = y', D^2y = D(Dy) = D(y') = y''$ och så vidare.
Även uttryck som $(D - \beta)(D - \alpha) = D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta$ tolkas formellt (även komplexa α, β är o.k.).

D: $Dy = y', D^2y = D(Dy) = D(y') = y''$ och så vidare.
Även uttryck som $(D - \beta)(D - \alpha) = D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta$ tolkas formellt (även komplexa α, β är o.k.).

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till $p(D)y = g(x)$ är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna homogenlösningen och y_p en partikulärlösning.

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Sats (Allmän struktur på lösning)

Den allmänna lösningen till $p(D)y = g(x)$ är på formen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna homogenlösningen och y_p en partikulärlösning.

Den allmänna formen på homogenlösningarna ges nedan, och en partikuklärlösning kommer vi hitta via en ansats.

Homogenlösningar

Homogenlösningar

Sats

Om $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = (r - r_1)^{m_1}(r - r_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (r - r_k)^{m_k}$*, där* $r_i \neq r_j$ *om* $i \neq j$*, så gäller att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

ges av

$$y(x) = P_1(x)\mathrm{e}^{\mathrm{r_1 x}} + \mathrm{P_2(x)e^{r_2 x}} + \ldots + \mathrm{P_k(x)e^{r_k x}},$$

där P_j *:a är polynom av högst grad* $(m_j - 1)$.