Substitutionen $y = ze^{kx}$ och förskjutningsregeln

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Andra ordningens ode

Om

$$y = z\mathrm{e}^{kx}$$

gäller

Om

$$y = ze^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)e^{kx}, \quad y'' = (z'' + 2kz' + k^2z)e^{kx}.$$

Andra ordningens ode

Om

$$y = z\mathrm{e}^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}, \quad \mathrm{y}'' = (\mathrm{z}'' + 2\mathrm{kz}' + \mathrm{k}^2\mathrm{z})\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}.$$

Andra ordningens ode

Om

$$y = z\mathrm{e}^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}, \quad \mathrm{y}'' = (\mathrm{z}'' + 2\mathrm{kz}' + \mathrm{k}^2\mathrm{z})\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}.$$

Insatt i

$$p(D)y = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by$$

får vi

Om

$$y = ze^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)e^{kx}, \quad y'' = (z'' + 2kz' + k^2 z)e^{kx}.$$

Insatt i

$$p(D)y = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by$$

får vi

$$\begin{aligned} p(D)y &= y'' + ay' + by \\ &= (z'' + 2kz' + k^2 z)e^{kx} + a(z' + kz)e^{kx} + bze^{kx} \end{aligned}$$

Om

$$y = ze^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)e^{kx}, \quad y'' = (z'' + 2kz' + k^2z)e^{kx}.$$

Insatt i

$$p(D)y = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by$$

får vi

$$\begin{aligned} p(D)y &= y'' + ay' + by \\ &= (z'' + 2kz' + k^2z)e^{kx} + a(z' + kz)e^{kx} + bze^{kx} = \\ &= (z'' + (2k + a)z' + (k^2 + ak + b)z)e^{kx} \end{aligned}$$

Om

$$y = ze^{kx}$$

gäller

$$y' = (z' + kz)e^{kx}, \quad y'' = (z'' + 2kz' + k^2 z)e^{kx}.$$

Insatt i

$$p(D)y = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by$$

får vi

$$\begin{aligned} p(D)y &= y'' + ay' + by \\ &= (z'' + 2kz' + k^2 z)e^{kx} + a(z' + kz)e^{kx} + bze^{kx} = \\ &= (z'' + (2k + a)z' + (k^2 + ak + b)z)e^{kx} = e^{kx}p(D + k)z. \end{aligned}$$

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Högre ordnings konstant-koefficients ode

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Operator

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0,$$

Ekvation:

$$p(D)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Sats (Förskjutningsregeln)

$$p(D)(z(x)\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{kx}}\mathrm{p}(\mathrm{D}+\mathrm{k})\mathrm{z}(\mathrm{x}).$$

Ovan menar vi alltså att på vänstersidan verkar $p(D)$ på produkten $z(x)\mathrm{e}^{\mathrm{kx}}$ och på högersidan verkar $p(D+k)$ bara på $z(x)$.