Taylors formel

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Taylor- och Maclaurinutvecklingar

Taylor- och Maclaurinutvecklingar

- Givet: Funktion $f(x)$ och fix punkt $a \in \mathbb{R}$.

- Givet: Funktion $f(x)$ och fix punkt $a \in \mathbb{R}$.
- Vill: approximera $f(x)$ med ett polynom $p_n(x)$ av grad högst n så att feltermen $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ går så fort som möjligt mot noll då $x \to a$.

Sats (Taylorpolynom)

Det finns ett unikt polynom $p_n(x)$ av grad högst n sådant att

$$p_n(a) = f(a), p_n'(a) = f'(a), \ldots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Detta polynom kallas Taylorpolynomet av ordning n i punkten a till f, och ges av

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

där $k! = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$

Maclaurin-utvecklingar

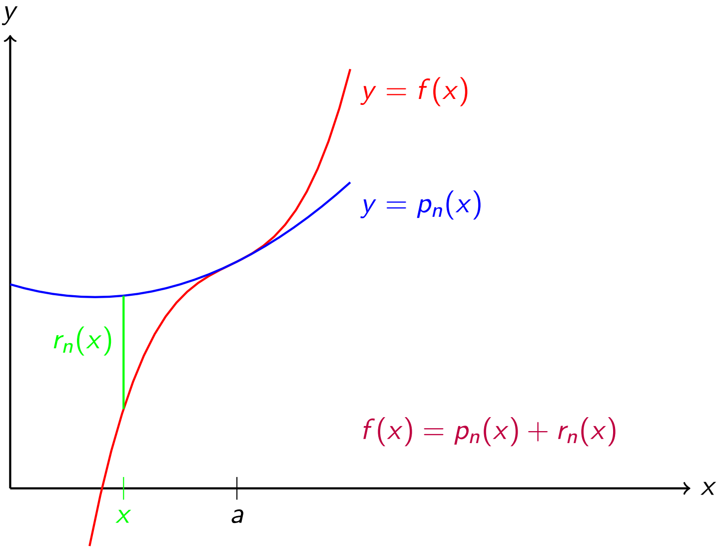
Taylorutvecklingar kring $a = 0$ kallas Maclaurinutvecklingar.

Maclaurin-utvecklingar

Taylorutvecklingar kring $a = 0$ kallas Maclaurinutvecklingar. Det allmänna fallet fås av detta via variabelbytet $x - a = t$, $g(t) = f(a + t)$.

Maclaurin-utvecklingar

Taylorutvecklingar kring $a = 0$ kallas Maclaurinutvecklingar.
Det allmänna fallet fås av detta via variabelbytet $x - a = t$, $g(t) = f(a + t)$.
Att utveckla f i a är ekvivalent med att utveckla g i 0.


y
$y = f(x)$
$y = p_n(x)$
$r_n(x)$
$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$
x
x
a

Felterm/Restterm

Felterm/Restterm

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x).$$

Felterm/Restterm

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x).$$

- Ordo-form: $r_n(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1}) = b(x)(x-a)^{n+1}$, där $b(x)$ är begränsad i någon omgivning till a.

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x).$$

- Ordo-form: $r_n(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1}) = b(x)(x-a)^{n+1}$, där $b(x)$ är begränsad i någon omgivning till a.
- Lagrange: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ för något ξ mellan a och x.

Felterm/Restterm

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x).$$

- Ordo-form: $r_n(x) = \mathcal{O}((x-a)^{n+1}) = b(x)(x-a)^{n+1}$, där $b(x)$ är begränsad i någon omgivning till a.
- Lagrange: $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ för något ξ mellan a och x.