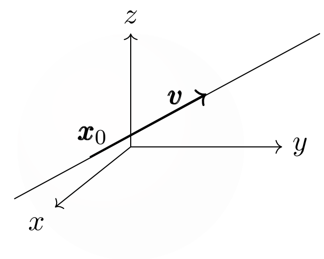
Mängder i $\mathbb{R}^n$. Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

1.1. Euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$: geometri

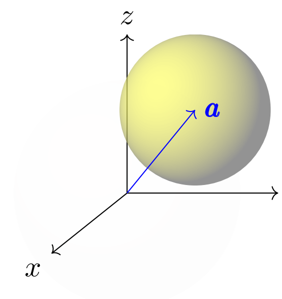
- Som vanligt betecknar vi med $\mathbb{R}^n$ mängden av alla reella n-tiplar $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ med origo (nollvektorn) $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- Vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är **parallella**, $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$, om det finns ett reellt λ så att $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ eller $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$
- $\mathbb{R}^n$ blir ett Euklidiskt rum om vi definierar en **skalärprodukt**:
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$
- **längden** eller **beloppet** av en vektor $\boldsymbol{x}$ är $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$
- **Avståndet** mellan två punkter $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är:
$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$
- Cauchy-Schwarz' olikhet: för godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^n$ gäller:
$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|. \tag{1.1}$$
- Triangelolikheten: I $\mathbb{R}^n$ gäller:
$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|. \tag{1.2}$$
- **Vinkeln** mellan två vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är:
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}$$
Obs. att (1.2) $\Rightarrow |\cos\theta| \leq 1$, alltså är vinkeln θ väl definierad.
- Vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ kallas **ortogonala** om $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$

1.2. Viktiga delmängder till $\mathbb{R}^n$



- En **linje** in $\mathbb{R}^3$ genom punkten $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ med *riktningsvektor* $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ på parameterform ges av

$$(x, y, z) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}t = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R}$$

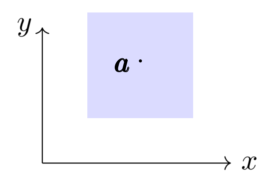


- Ett **öppet klot** i $\mathbb{R}^n$ är mängd som kan skrivas

$$B(\boldsymbol{a}; r) = B_{\boldsymbol{a}}(r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < r\}$$

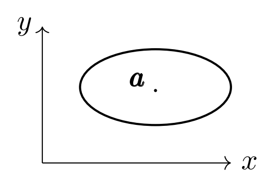
Vi kallar $\boldsymbol{a}$ klotets *meddelpunkt* eller *centrum* och r klotets *radie*.

- I $\mathbb{R}^1$ resp. $\mathbb{R}^2$ ger det *intervallet* $a - r < x < a + r$ resp *cirkelskivan* $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$.
- En sfär in $\mathbb{R}^n$ är mängden av punkter $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = r\}$



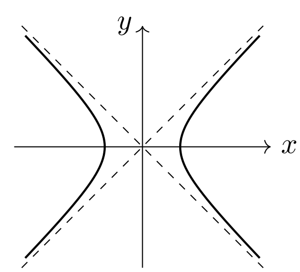
- En **öppen kvadrat** i $\mathbb{R}^2$ med sidan $2b$ och meddelpunkten $\boldsymbol{a} = (x_0, y_0)$ är mängd av punkter som uppfyller

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < b$$



- En ellips i $\mathbb{R}^2$ med meddelpunkten $\boldsymbol{a}$ och halvaxelläangderna a resp. b ges av ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



- En hyperbola i $\mathbb{R}^2$ med meddelpunkten i origo ges av ekvationen

$$x^2 - y^2 = c, \quad c \neq 0$$

1.3. Topologi i $\mathbb{R}^n$: öppna och slutna mängder

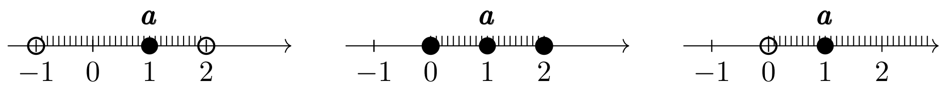
Vi behöver ge uttrycken “ligga i närheten” och “omgivningen” “konvergera” en rigorös mening för att senare definiera begreppen gränsvärde och derivata.

Idé: $x \approx a$ är ekvivalent att säga att (avståndet, beloppet) $|x - a|$ är ‘litet’.

Definition 1.1. Mängden $U \subset \mathbb{R}^n$ är en **omgivning** till pukten $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i $\boldsymbol{a}$.

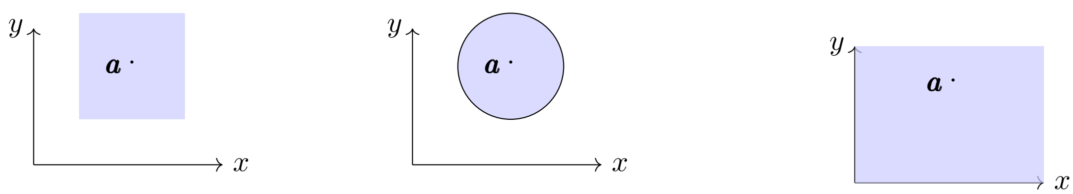
Exempel 1.1. Olika omgivningar till punkten $x = 1$ i $\mathbb{R}^1$ i form av resp. mängdbeskivining, olikhet och bild:

$U =]-2, 5[$	$U = [0, 2]$	$U = [0, \infty[$
$-1 < x < 2$	$0 \leq x \leq 2$	$x > 0$



Exempel 1.2. Olika omgivningar till punkten $\boldsymbol{a} = (2, 2)$ i $\mathbb{R}^2$:

en kvadrat	en sluten cirkelskiva	den första kvadranten
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, 1 < y < 3\}$	$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$	$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

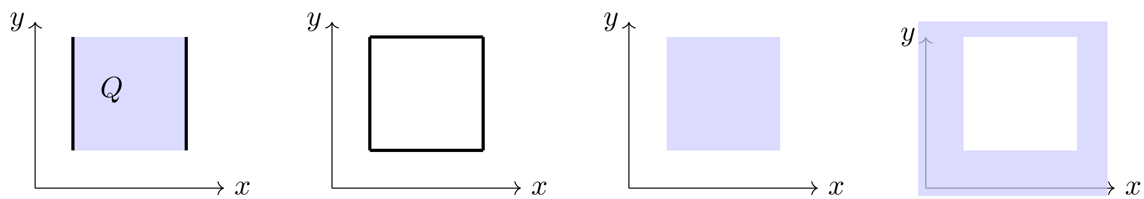


Definition 1.2. Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ kallas

- **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring $\boldsymbol{a}$ som ligger helt i M;
- **yttre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring $\boldsymbol{a}$ som ligger i komplementet $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ till M;
- **randpunkt** till M om *varje* öppet klot innehåller punkter från såväll M som M^c

Exempel 1.3. Betrakta $Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 2\}$, se bilden.

mängden	randen	inre punkter	yttre punkter

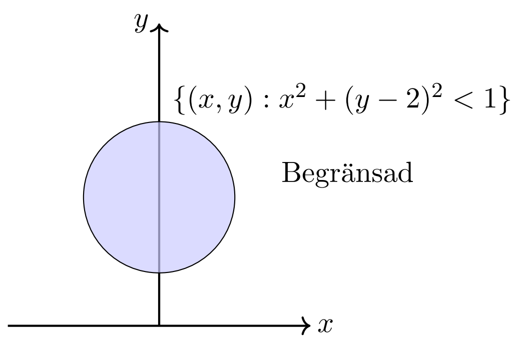


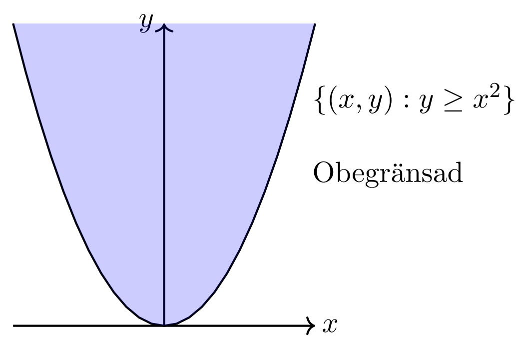
Definition 1.3. En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **öppen** om alla dess pukter är inre punkter. Den kallas **sluten** om alla dess randpukter tillhör M.

Mängden Q i Exempel 1.3 är varken öppen eller sluten. Här kommer ytterligare exempel:

Slutna mängder i $\mathbb{R}^2$:	Öppna mängder i $\mathbb{R}^2$:
• en godtycklig linje	• den första kvadranten $\{x > 0, y > 0\}$
• en sluten cirkelskiva (kvadrat)	• en öppen cirkelskiva (kvadrat)
• hela planet	• hela planet
• tomma mängden $\emptyset$	• tomma mängden $\emptyset$

Definition 1.4. Mängden $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **begränsad** om det finns ett tal C sådant att $|x| \leq C$ för alla $x \in M$.





Definition 1.5. Mängden $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **kompakt** om den är både sluten och begränsad.

Exempel 1.4. Den slutna cirkelskivan ovan är kompakt, medan parabeln är inte.

1.4. Funktioner av flera variabler

Tänk på linjär algebra: en linjär avbilding är en map från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ ges av p linjära sammankopplade funktioner.

Viktiga speciella fall:

- $n = 2$, $p = 1$: **reellvärda funktioner** av tvåvariabler, t. ex. $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $n = 3$, $p = 1$: reellvärda funktioner av tre variabler, t. ex. $f(x, y, z) = xyz$
- $n \geq 2$, $p = 1$: reellvärda funktioner av flera variabler, t. ex. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$
- $n = 1$, $p = 2$: **kurvor** i $\mathbb{R}^2$, t. ex. $f(t) = (\cos t, \sin t)$ (tänk på t som *tiden*)
- $n = 1$, $p = 3$: **kurvor** i $\mathbb{R}^3$, t. ex. $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$
- $n = 2$, $p = 3$: **ytor** i $\mathbb{R}^3$, t. ex. $\begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{pmatrix}$
- $n = 2$, $p = 2$: **avbildningar** , t. ex. $\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$

1.5. Reellvärda funktioner och dessa nivåmängder

- För en reellvärd funktion $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, av två variabler x och y definierar vi

$$\textbf{grafen av } f \ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y), \quad (x,y) \in D\}$$

  Grafen av en funktion av två variabler kan betraktas som en **yta** i $\mathbb{R}^3$ som ges parametriskt av

$$\begin{cases} x = x \\ y = y & \qquad (x,y) \in D \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

- En **nivåkurva** för en funktion av två variabler $f(x,y)$ är mängden i xy-planet

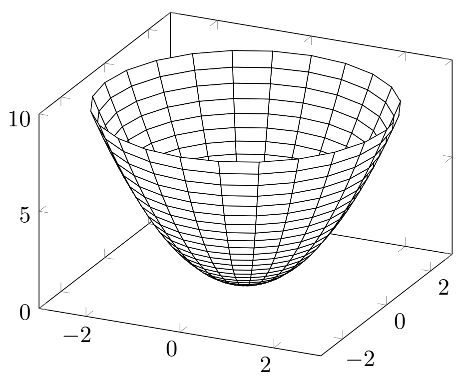
$$f(x,y) = c, \qquad \text{där } c \text{ är ett godtyckligt reellt tal.}$$

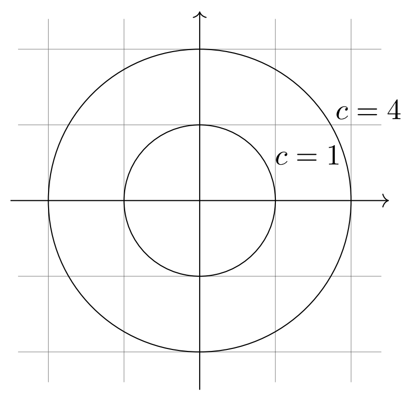
  Likadant, en **nivåyta** för en funktion av tre variabler $f(x,y,z)$ är mängden i xyz-rummet $f(x,y,z) = c$.

- En viktig praktisk fråga: hur funktionsytan kan tänkas se ut dels med ledning av nivåkurvorna?

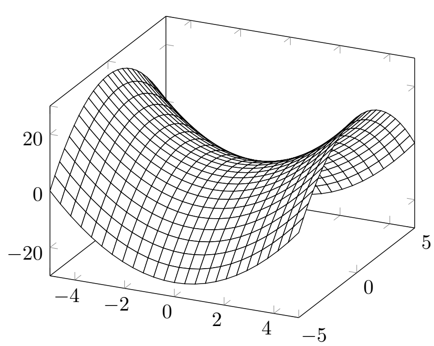
Exempel 1.5. Observera att grafen av funktion av en variabel $f(x) = x^2$ är samtidigt 0-nivåmängd av funktion $g(x,y) = y - x^2$ av två variabler. Alternativt, den är också 1-nivåmängd av funktionen $h(x,y) = \frac{y}{x^2}$.

Exempel 1.6. Bertakta $f(x,y) = x^2 + y^2$. Grafen till f är en (ellitpisk) paraboloid. Nivåkurvor är cirklar: $x^2 + y^2 = c$ av radien $r = \sqrt{c}$ med centrum i origo:





Exempel 1.7. Bertakta $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$. Nivåytor $f = c$ är familjen av parallella (hyperboliska) paraboloider som ges i $\mathbb{R}^3$ av en graf av funktionen $z = x^2 - y^2 - c$, $c \in \mathbb{R}$. Se nivåytan $f = 0$:



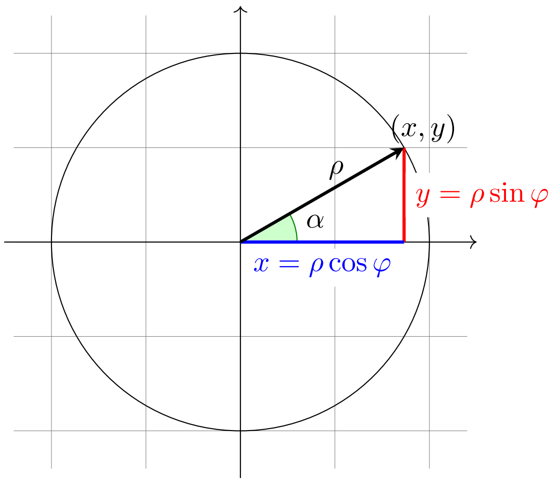
1.6. Sammansatta funktioner

Exempel 1.8. Kan $f(x,y)$ skrivas med hjälp av en funktion $g = g(t)$ av en variabel enligt nedan?

a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy} = g(\frac{x}{y})$. **Svar**: ja, $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t + \frac{1}{t}$, där $t = \frac{x}{y}$, alltså $g(t) = t + \frac{1}{t}$.

b) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} = g(\frac{x}{y})$. **Svar**: nej, ty t.ex. $(x,y) = (1,1)$ och $(2,2)$ ger samma $t = 1$ men olika f (1 resp. $\frac{1}{2}$).

1.7. Planpolära koordinater i $\mathbb{R}^2$



Variabelbytre

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

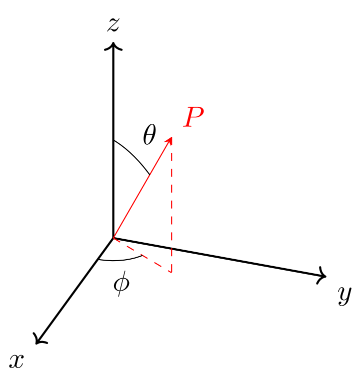
definierar en bijektiv avbildning av området

$$\begin{cases} \rho > 0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

på området $(x,y) \neq (0,0)$ i xy-planet $\mathbb{R}^2$

Obs!
$x^2 + y^2 = \rho^2$.

1.8. Rymdpolära koordinater i $\mathbb{R}^3$



Variabelbytre

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

definierar en bijektiv avbildning av området

$$\begin{cases} r > 0 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

på området (x,y,z) utan z-axeln i xyz-rummet $\mathbb{R}^3$

Obs!
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.