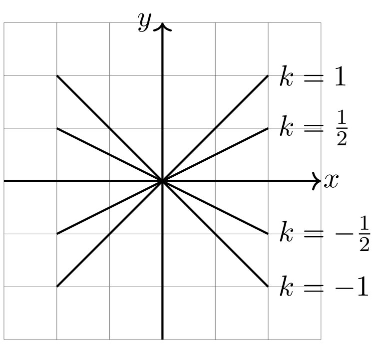
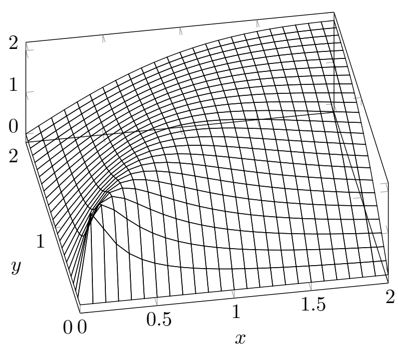
Gränsvärden

2.1. Gränsvärden: inledande exempel

Exempel 2.1. Tänk på att du behöver skissa utseendet för t.ex. funktionen $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Definitionsmängden av f är $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Eftersom funktionen f saknar värde i origo, behöver vi studera vad som händer med funktionsvärdet då punkten $\boldsymbol{x} = (x,y)$ går mot $\mathbf{0}$. För att skissa grafen till f *i omgivning av origo* studerar vi olika linjer som går genom origo:

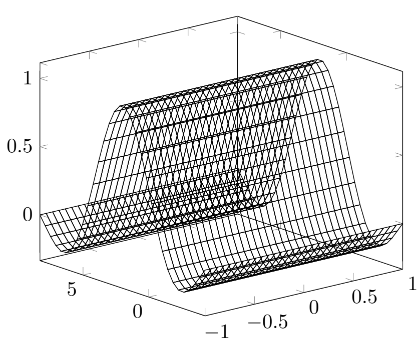
$$y = kx \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = f(x,kx) = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$





Detta vissar bland annat att linjerna $y = kx$, $x \neq 0$, *är nivåkurvor* till f! Om man närmar sig origo längs linjerna $y = kx$ närmar sig funktionens värden $\frac{k}{1+k^2}$, vilket vissar att (funktionens) gränsvärde är olika för olika värde på k. Med andra ord saknar funktionen f gränsvärde äi origo.

Exempel 2.2. Undersök funktionen $f(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{x-y}$. Då $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{linjen } y = x\}$. Grafen till f är



Exempel 2.3. Undersök funktionen $f(x,y) = \frac{x^2y}{(x^2+y)^2}$.

2.2. Gränsvärde: definition och egenskaper

Definition 2.1. Låt $\boldsymbol{f}$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ och antag att $\boldsymbol{a}$ är en *inre punkt eller en randpunkt* till D. Vi säger då att $\boldsymbol{f}$ har **gränsvärdet** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ i punkten $\boldsymbol{a}$ om det till varje tal $\epsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x - a| < \delta \text{ och } x \in D \quad \text{medför att} \quad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon$$

Vi skriver detta som

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

alternmativt

$$\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{b} \quad \text{då} \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$$

Exempel 2.4. Betrakta $\mathbb{R}^2$ och $f(x, y) = 10y$. Visa att $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 30$. Tips: testa med $\delta = \epsilon/10$.

Definition 2.2. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^p$. Antag att $D \cap B(R)^c \neq \emptyset$ för alla $R > 0$ (med andra ord att D avlängsar sig långt bort från origo). Vi säger att

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

om det till varje tal $\epsilon > 0$ finns det $R > 0$ sådant att

$$|x| > R \text{ och } x \in D \quad \text{medför att} \quad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon$$

- **Obs!** att $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ inte är definierat om $\boldsymbol{a}$ är en *isolerad punkt* i $D_{\boldsymbol{f}}$
- **Reellvärda funktioner av två variabler**: särslilda beteckningar

  $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

  och gränsvärde i oändligheten:

  $$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x, y)$$

- **Vektorvärda $\Rightarrow$ reellvärda funktioner**. Det räcker med att studera komponenter: om $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ och $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_p)$ så gäller det att

  $$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x}) = b_j, \quad j = 1, 2 \ldots, p.$$

- **Sammansättningsregel.** Antag att $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^p$, och $\boldsymbol{f} : D \to E$, $\boldsymbol{g} : E \to \mathbb{R}^q$. Då ges den sammansatta funktionen $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ av

  $$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})), \qquad x \in D.$$

  Om $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{b}$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{c}$ då $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{b}$ så gäller **sammansättningsregel**: $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} \to \boldsymbol{c}$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$.

Exempel 2.5. Undersök $\lim_{(x,y)\to0,0)} e^{\tan xy}$.

- **Summa.** Antag att $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$ ähar samma definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ och $\boldsymbol{f} \to \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{g} \to \mathbb{R}^p$. Då gäller att

  $$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

- **Produkt och kvot.** Antag att f och g är reellvärda funktioner med samma definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller att
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \cdot \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}).$$
Om $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ dågäller att
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})}{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})}.$$

- **Instängningsregeln.** Antag att reellvärda funktioner f och h har samma gränsvärde i punkten $\boldsymbol{a}$ och att det också gäller att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i D. Då existerar gränsvärdet $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ och är lika med det gemensamma gränsvärdet av f och h.

- **Instängningsregeln för absolutbeloppet.** Om $|f(x)| \leq g(x)$ i D och $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) = 0$ då existerar gränsvärdet $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ och $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$.
Bevis. Tänk så här: om vi blir tilldelade ett litet $\epsilon > 0$ då existerar $\delta > 0$ så att
$$|g(\boldsymbol{x}) - 0| < \epsilon \text{ om } 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$$
vilket medför att $|f(\boldsymbol{x})| < g(\boldsymbol{x}) = |g(\boldsymbol{x})| < \epsilon$, V.S.B. □

- **Negativt test.** För att visa att ett gränsvärde i en punkt $\boldsymbol{a}$ *inte* existerar så räcker det med att det finns två vägar som gör att gränsvärdet får olika värden.

Exempel 2.6. Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ och $\boldsymbol{a} = (0,0)$.

- **Gränsvärde i origo**: (beteckning)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(x,y), \quad \text{där } \rho = \sqrt{x^2+y^2} \text{ är den polära radien.}$$

Exempel 2.7. Undersök $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Lösning. I polära kordinater:
$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho^2 \sin^2\varphi}{\rho^2}\right| \leq \rho^2 \cdot 1 \cdot 1 = \rho^2 \to 0 \qquad \text{då} \quad \rho \to 0.$$
Det kallar vi en *φ-oberoende uppskattning.* Med hjälp av instängningsregeln för absolutbeloppet (med $g(x,y) = \rho^2 = x^2+y^2$) följer att
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

2.3. Kontinuerliga fuinktioner

Det bästa fallet är *när värde sammanfaller med gränsvärde.*

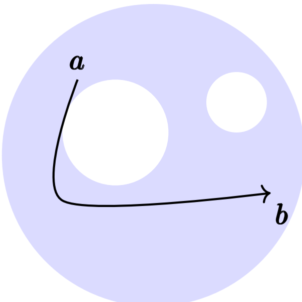
Definition 2.3. Låt $\boldsymbol{f}$ vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$ med definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att $\boldsymbol{f}$ är **kontinuerlig** i punkten $\boldsymbol{a} \in D$ om gränsvärde $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ exiterar och
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$
Om f är definierad i en punkt $\boldsymbol{a} \in D_f$ med ej kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$ då sägs den ha en diskontinuitet i $\boldsymbol{a}$. Om en funktion är kontinuerlig i varje punkt i dess definitionsmängd så sägs den vara **kontinuerlig**.

Alla **polynom i flera variabler**, t. ex. $x^2 - 2xyz - z^3$ är kontinuerliga funktioner (*varför?*)

2.4. Satser om kontinuerliga funktioner

Sats 1 (Satsen om största och minsta värde)**.** *Om f är en reellvärd kontinuerlig funktion med **kompakt** definitionsmängd D så har f såväll ett största som ett minsta värde på D.*

En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **bågvis sammanhängande** om det till varje par $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ av punkter i D finns en kontinuerlig kurva $t \to \boldsymbol{x}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ sådan att $\boldsymbol{x}(t) \in D$ för alla t och $\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{x}(\beta) = \boldsymbol{b}$.



Sats 2 (Satsen om mellanliggande värden)**.** *Låt f vara en reellvärd kontinuerlig funktion med bågvis sammanhängande definitionsmängd D. Om f i D antar två värden $f(\boldsymbol{a})$ och $f(\boldsymbol{b})$ så antar f också alla värden mellan $f(\boldsymbol{a})$ och $f(\boldsymbol{b})$.*

Exempel 2.8.

a) Funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ är inte kontinuerlig i origo eftersom den saknar *värde* i $(0, 0)$.

b) Funktionen
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
är *inte kontinuerlig* i origo eftersom den saknar gränsvärde i $(0, 0)$.

c) Funktionen
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
är *kontinuerlig* i origo enligt Exempel 2.7.

Exempel 2.9. Undersök $f(x, y) = \frac{x^2+x^2y^2+y^2}{x^2+y^2}$ då $(x, y) \to (0, 0)$.

Lösning. Med hjälp av φ-oberoende uppskattning:
$$|f(x, y) - 1| = \left| \frac{\rho^2 + \rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\rho^2} - 1 \right| = \left|\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\right| \le \rho^2 \to 0 \qquad \text{då} \quad r \to 0.$$
så att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.

Gör så här: om du har nämnare som
$$ax^2 + by^2 \quad \text{resp.} \quad ax^2 + by^2 + cz^2$$
då hjälper ofta generaliserade (eller modifierade) polära (resp. rymmdpolära) koordinater:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{a}}\rho\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{b}}\rho\sin\varphi \end{cases} \quad \text{resp} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{a}}r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{b}}r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \frac{1}{\sqrt{c}}r\cos\theta \end{cases}$$

Exempel 2.10. Bestäm om möjligt $f(0,0)$ så att $f(x,y) = \frac{x^3 - yx^2}{x^2+4y^2}$ blir kontinuerlig i $(0,0)$

Lösning. Vanliga polära koordinater ger ingen effekt eftrsom

$$x^2 + 4y^2 = \rho^2 \cos^2\varphi + 4\rho^2 \sin^2\varphi \neq \rho^2.$$

Istället anpassar vi variabelbyte (de så kallade generaliserade polära koordinater)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{4}}\rho\cos\varphi \end{cases}$$

så följer det att

$$x^2 + 4y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\rho^2\sin^2\varphi = \rho^2,$$

alltså

$$\left|\frac{x^3 - yx^2}{x^2+4y^2}\right| = \left|\frac{\rho^3(\cos^3\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos^2\varphi)}{\rho^2}\right| = \left|\rho(\cos^3\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi)\right| \leq \rho\cdot 2 \to 0 \quad \text{då} \quad \rho \to 0.$$

Exempel 2.11. Kan man definiera $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2+2y+1}$ i undantagspunkten så att f blir kontinuerlig där?

Lösning. Undantagspunkt $\Leftrightarrow$ nämnare $= 0$ ger

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + (y+1)^2 = 0,$$

alltså $(x,y) = (0,-1)$. Med hjälp av polära koordinater (med punkten $(0,-1)$ som polen),

$$\begin{cases} x = 0 + \rho\cos\varphi \\ y = -1 + \rho\cos\varphi \end{cases}$$

så får vi

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+(y+1)^2}\right| = \left|\frac{\rho^3(-1+\rho\sin\varphi)}{\rho^2}\right| \leq \rho(1+\rho) \to 0 \quad \text{då} \quad \rho \to 0.$$

d.v.s. $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = 0$. Alltså blir den *utvidgade* funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2+2y+1} \text{ om } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 \text{ om } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

kontinuerlig.