Pariella derivator. Differentierbarhet

3.1. Kort sammanfattning av derivatabegreppet för $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

Huvudidén är att imitera definition av derivata i envariabelfallet. En funktion $y = f(x)$ av en variabel är kallas *deriverbar* om f är definierad i någon omgivning av a och gränsvärdet

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =: f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a). \tag{3.1}$$

exiterar. Gränsvärdet kallas då *derivatan* av f i a och betecknas $f'(a)$.

Geometrisk tolkning:

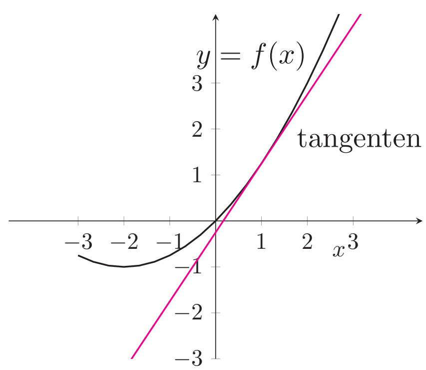
Existensen av $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$ betyder att

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + \omega(x) \cdot (x-a)$$

där $\omega(x) \to 0$ då $x \to a$, vilket även innebär att linjen

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

tangerar grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.



3.2. Partiella derivator

Definition 3.1. Antag att $f(x,y)$ är definierad i en omgivning av punkten (a,b). Om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

existerar så säger vi att f är **partiellt deriverbar** med avseende på x i (a,b). Gränsvärdet kallas den **partiella derivatan** av f med avseende på x i punkten (a,b) och betecknas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f'_x(a,b) = D_x f(a,b) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

På motsvarande sätt definierar vi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

I den allmänna fallet med en funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ av n variabler:

$$f'_{x_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_i+h,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}.$$

där $\boldsymbol{e}_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ är vektorn med 1 på plats i.

Om alla partiella derivatorna $f'_{x_i}(\boldsymbol{a})$ existerar för $i=1,\dots,n$ säges f vara **partiellt deriverbar** i punkten $\boldsymbol{a}$.

Viktigt! Man får använda beteckningen utan index för en funktion av en variabel, t.ex. $f'(x)$. Däremot partiella derivator är altid med index, d.v.s. att skriva $f'(x,y)$ är ett fel.

Example 3.1.

- Om $f(x,y,z) = x^2\ln y + yz$ då $\frac{\partial f}{\partial x} =$ tänk att y och z är 'konstanter' $= 2x\ln y$. Likadant, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + z$ och $\frac{\partial f}{\partial z} = y$
- För $f(x,y) = g(xy)$ (obs. att $g=g(t)$ är funktion av en variabel t, d.v.s. f är en sammansatt funktion):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(xy)y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(xy)x$$

  vilket betyder att $f(x,y)=g(xy)$ är en lösning till *differentialekvationen*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Example 3.2. Om $f=f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ så behöver $f(x,y)$ *inte* vara en konstant. T.ex. $\frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 0$, eller $\frac{\partial(e^y\sin y)}{\partial x} = 0$. Allmänt, om $D_f = \mathbb{R}^2$ och $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ för alla (x,y) så är $x\to f(x,y)$ en konstant funktion av x för varje y, d.v.s.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad f(x,y) = g(y) \text{ för en godtycklig direverbar funktion } g \text{ av en variabel } y.}$$

Example 3.3. Samma gäller för tre variabler:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 0 \quad\Rightarrow\quad f(x,y,z) = g(y,z).}$$

Example 3.4. Lös systemet för $u=u(x,y,z)$

$$\begin{cases} u'_x = yz^2, \\ u'_y = xz^2 + 2y + z, \\ u'_z = 2xyz + y + 2e^{2z} \end{cases}$$

Lösning. Vi integrerar den första ekvationen (m.a.p. x):

$$u(x,y,z) = \int yz^2\,dx = xyz^2 + g(y,z),$$

där $g(y,z)$ är en godtycklig ('direverbar') som **inte** beror av x. Insättning i den andra ekvationen ger

$$u'_y = xz^2 + g'_y(y,z) = xz^2 + 2y + z \quad \Rightarrow \quad g'_y(y,z) = 2y + z \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = y^2 + yz + h(z),$$

alltså $u = xyz^2 + y^2 + yz + h(z)$. Insättning i den tredje ekvationen ger att

$$u'_z = (xyz^2 + y^2 + yz + h(z))'_z = 2xyz + y + 2e^{2z} \quad \Rightarrow \quad h'(z) = 2e^{2z} \quad \Rightarrow \quad h(z) = e^{2z} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

alltså

$$u = xyz^2 + y^2 + yz + h(z) = xyz^2 + y^2 + yz + e^{2z} + C.$$

Example 3.5. Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ om } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vi vet att f inte är kontinuerlig i origo. Däremot, $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$ och samma gäller för $f'_y(0,0) = 0$.

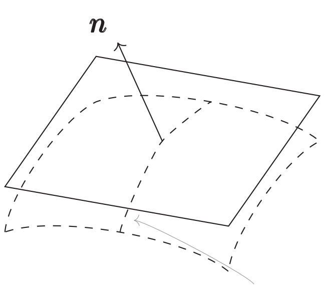
Med detta exemepel ser vi att

$$\boxed{\text{att vara } \textbf{partiellt deriverbar} \not\Rightarrow \text{ att vara } \textbf{continuerlig}!}$$

3.3. Differentierbarhet

Definition 3.2. Låt (a,b) vara en inre punkt i definitionsmängd D till en funktion $f(x,y)$. Vi säger att f är **differentierbar i punkten** (a,b) om det finns konstanter A_1 och A_2 och en funktion $\omega(h,k)$ sådana att

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2+k^2}\,\omega(h,k), \qquad \text{med} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = 0. \tag{3.2}$$



Planet med ekvationen

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

kallas för **tangentplan** till funktionsytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$. Uttrycket

$$df(a,b) = f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k, \quad \text{där} \quad h = dx, \ k = dy$$

kallas för **differential** av f i punkten (a,b).

Example 3.6 (Differentierbarhet). För $f(x,y) = xy$ och $(a,b) = (1,2)$ gäller att

$$f(1+h, 2+k) - f(1,2) = (1+h)(2+k) - 2 = h + 2k + hk = \overset{A_1}{\overset{\downarrow}{\mathbf{1}}} \cdot h + \overset{A_2}{\overset{\downarrow}{\mathbf{2}}} \cdot k + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \overset{\omega(h,k)}{\overset{\downarrow}{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}}$$

där $\omega(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ då $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ (testa gärna med polära koordinater!)

Example 3.7 (**Felanalys**). Uppskatta $f(2,1;0,95)$ då $f(x,y) = x/y^2$, via differentialen.

Lösning. Partiella derivatorna är $f'_x = \frac{1}{y^2}$ och $f'_y = -\frac{2x}{y^3}$, alltså $f'_x(2,1) = 1$ och $f'_y(2,1) = -4$, altså

$$
\begin{aligned}
f(2,1;0,95) - f(2;1) \approx df(2,1) &= f'_x(2,1)\cdot(2,1-2) + f'_y(2,1)\cdot(0,95-1) = \\
&= 0,1 + 4\cdot 0,05 = 0,3 \\
&\Rightarrow \quad f(2,1;0,95) \approx 2 + 0,3 = 2,3.
\end{aligned}
$$

I det allmäna fallet har vi följande definition.

Definition 3.3. Låt $\boldsymbol{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ till en funktion $f(\boldsymbol{x})$. Vi säger att f är **differentierbar i punkten** ($\boldsymbol{a}$ om det finns konstanter A_i, $i = 1,\ldots,n$ och en funktion $\omega(\boldsymbol{h})$ sådana att

$$
f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = A_1h_1 + \ldots + A_nh_n + |\boldsymbol{h}|\omega(\boldsymbol{h}), \qquad \text{med} \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\omega(\boldsymbol{h}) = 0. \tag{3.3}
$$

Om f är differentierbar i varje punkt $a \in D$ säger vi att f är differentierbar i D.

Sats 3. *En differentierbar funktion är kontinuerlig.*

Bevis. För två variabler följer detta direkt från (3.3) då $\boldsymbol{h} \to 0$. □

Sats 4. *En differentierbar funktion f är partiellt direverbar med*

$$
f'_{x_j}(\boldsymbol{a}) = A_j
$$

där $A_1,\ldots,A_n$ är talen i (3.2).

Bevis. Om vi väljer $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{e}_k$ får vi då

$$
\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a})}{t} = A_k + \frac{|t\boldsymbol{e}_k|}{t}\omega(t\boldsymbol{e}_k) \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a})}{t} = A_k.
$$

□

Example 3.8 (**Tangentplan**). Bestäm ekvationer för tangentplanen till ytan $z = x^2 - xy + 2$ i $M(1,2,1)$.

Lösning. Partiella derivatorna är $f'_x = 2x - y$ och $f'_y = -x$, alltså $f'_x(1,2) = 0$ och $f'_y(1,2) = -1$ och tangentplanevation är

$$
z = 1 + 0\cdot(x-1) + (-1)\cdot(y-2) = 3 - y.
$$

□

Definition 3.4. Låt f vara definierad i en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ vi säger att f är av **klass** $\mathscr{C}^1$, eller $f \in \mathscr{C}^1(D)$ om f är partiellt deriverbar och om alla de partiella derivatorna $f'_1,\ldots,f'_n$ är kontinuerliga i D. Vi säger att f är av **klass** $\mathscr{C}^k$ om alla derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga.

Sats 5. *Varje funktion f av klassen $\mathscr{C}^1$ är differentierbar.*

3.4. Partiella derivator av högre ordning

T.ex. andra ordningens derivator

$$
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f''_{x_kx_j} = f''_{kj}.
$$

Sats 6. *För varje funktion $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ av klass $\mathscr{C}^2$ gäller att*

$$
f''_{x_kx_j} = f''_{x_jx_k}.
$$