Kedjeregeln

1.1. Diverse inledande exempel

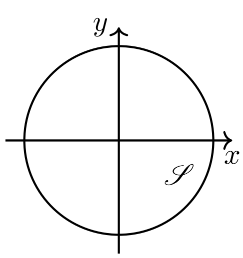
Exempel 1.1. Låt $f(t) = \sin t$ och $g(x,y) = x/y$ så att $F(x,y) := f \circ g(x,y) = \sin \frac{x}{y}$. Då får vi för partiella derivator

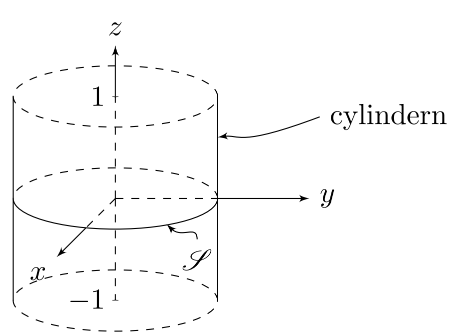
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Allmänt,om den sammansatta funktionen $F(x,y) := f(g(x,y))$ är väl definierad så

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(g(x,y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}$$

Exempel 1.2. Antag att $f(x,y) = x^2 - y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ och $g(t) = (\cos t, \sin t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Låt $\mathscr{S}$ vara kurvan given genom ekvationen på parameterform $(x,y) = g(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, alltså enhetscirkeln:





Den sammansatta funktionen $f \circ g(t)$ kan då tolkas som restriktion av f till enhetcirkel $\mathscr{S} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (restriktionen är det samma funktion f men vi minskar definitionsmängden till $\mathscr{S}$.) Detta problem förekommer ofta t.ex i optimeringen. Då får vi för derivata av $f \circ g(t)$:

$$f(g(t)) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} f(g(t)) = -2 \sin 2t.$$

Alternativt kan vi beräkna derivatan med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{d}{dt}(x^2 - y^2) = 2xx'_t - 2yy'_t = -2\cos t \sin t - 2 \sin t \cos t = -4 \sin t \cos t = -2 \sin 2t.$$

Sats 1. *Antag att $f(x,y)$, $g_1(t)$ och $g_2(t)$ är differentierbara funktioner och den sammansatta funktionen $f(g_1(t), g_2(t))$ är definierad. Då är $f(g_1(t), g_2(t))$ deriverbar och* ***kedjeregeln*** *gäller*

$$\boxed{\frac{df(g_1(t),g_2(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t),g_2(t))\cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t),g_2(t))\cdot g_2'(t)}$$

Bevis (grund idé). Eftersom $g_1(t)$ och $g_2(t)$ är differentierbara funktioner i t_0 får vi

$$\begin{aligned} g_1(t_0+h) &= g_1(t_0) + g_1'(t_0)\cdot h + h\omega_1(h) = a + a_1h + h\omega_1(h),\\ g_2(t_0+h) &= g_2(t_0) + g_2'(t_0)\cdot h + h\omega_2(h) = b + b_1h + h\omega_2(h), \end{aligned}$$

där $\lim_{h\to 0}\omega_1(h) = \lim_{h\to 0}\omega_2(h) = 0$ och $g_1(t_0) = a$, $g_2(t_0) = b$, $g_1'(t_0) = a_1$, $g_2'(t_0) = b_1$. Enligt differentierbarhet av f i punkten (a,b):

$$f(a+k, b+l) - f(a,b) = A_1k + A_2l + \omega(k,l)\sqrt{k^2+l^2}, \qquad \lim_{(k,l)\to(0,0)}\omega(k,l) = 0,$$

där $A_1 = f_x'(a,b)$, $A_2 = f_y'(a,b)$. Så får vi för den sammansatta funktionen $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$:

$$\begin{aligned} F(t_0+h) - F(t_0) &= f(a+k, b+l) - f(a,b) =\\ &= f(a + a_1h + h\omega_1(h), b + b_1h + h\omega_2(h)) - f(a,b) =\\ &= A_1\cdot(a_1h + h\omega_1(h)) + A_2\cdot(b_1h + h\omega_2(h)) + h\Omega(h)\\ &= A_1a_1h + A_2b_1h + h\Omega_1(h) \end{aligned}$$

där $\lim_{h\to 0}\Omega_1(h) = 0$ (varför?). Alltså:

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = f_x'(g_1(t_0), g_2(t_0))g_1'(t_0) + f_y'(g_1(t_0), g_2(t_0))g_2'(t_0).$$

□

Exempel 1.3. Bestäm $f(t)$ så att $u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ uppfyller

$$x\tfrac{\partial u}{\partial x} + y\tfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \qquad u(1,2) = 5.$$

Lösning. Låt $\rho = \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, då

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = f'(\rho)\cdot\rho_x' = f'(\rho)\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \tfrac{f'(\rho)}{\rho}\cdot x,$$

och likadant $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f'(\rho)}{\rho}\cdot y$, alltså

$$\begin{aligned} 2f(\rho) = x\tfrac{\partial u}{\partial x} + y\tfrac{\partial u}{\partial y} &= \frac{f'(\rho)}{\rho}\cdot(x^2+y^2) = f'(\rho)\rho\\ \Rightarrow \quad \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} &= \frac{2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \ln f(\rho) = 2\ln\rho + C. \end{aligned}$$

Alltså är $f = C\rho^2$. Återgång till x och y ger följaktligen att $u(x,y) = C(x^2+y^2)$. Eftersom

$$u(1,2) = C\cdot(1^2+2^2) = 5C = 5$$

får vi $C = 1$. Problemet har alltså den entydiga lösningen

$$u(x,y) = x^2+y^2.$$

1.2. Den allmäna kedjeregeln och PDE

Låt $\{f_k(t_1,\dots,t_q) : k = 1,\dots,n\}$ och $u(x_1,\dots,x_n)$ vara funktioner av klass $\mathscr{C}^1$ så är den sammansatta funktionen $u(f_1(t_1,\dots,t_q),\dots,f_n(t_1,\dots,t_q))$ av klass $\mathscr{C}^1$ och

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial t_j}, \qquad j = 1,2\ldots,q.$$

Alternativt kan detta skrivas som följande "minnesregel"

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_j}}$$

Exempel 1.4. Antag att $z(x,y) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ och lös

$$z'_x - 2z'_y = x + y \qquad \text{med villkoret } z(x,0) = 0$$

m.h.a. variablebyte $u = 2x + y$, $v = x$.

Lösning. Vi får för partiella derivatorna

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

alltså **transformeras** den ursprungliga ekvationen till

$$z'_x - 2z'_y = 2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} = \text{ enligt antagande } = x + y = \text{ efter variabelbyte } = u - v$$
$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = u - v \qquad \Longrightarrow \qquad z = \int (u-v)dv = uv - \tfrac{1}{2}v^2 + g(u)$$

Återgång till x och y ger följaktligen att den **allmäna lösningen** är

$$z = (2x+y)x - \tfrac{1}{2}x^2 + g(2x+y) = \tfrac{3}{2}x^2 + xy + g(2x+y),$$

där $g = g(t)$ fås ut genom insättning i vilkoret:

$$z(x,0) = \tfrac{3}{2}x^2 + 0 + g(2x+0) = \tfrac{3}{2}x^2 + g(2x) = 0$$

vilket ger

$$g(2x) = -\tfrac{3}{2}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad g(t) = -\tfrac{3}{2}(t/2)^2 = -\tfrac{3}{8}t^2.$$

Problemet har alltså den entydiga lösningen

$$z(x,y) = \tfrac{3}{2}x^2 + xy - \tfrac{3}{8}(2x+y)^2 = -\tfrac{1}{2}xy - \tfrac{3}{8}y^2.$$

Kontroll: $z(x,0) = 0$ och $z'_x - 2z'_y = -\frac{1}{2}y - 2\cdot(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y) = x + y$,

---

Exempel 1.5. Transformera och lös

$$x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

med hjälp av $u = x$, $v = y/x$ $(x > 0)$ och bivillkoren $z(1,y) = 0$, $z'_x(1,y) = y^2$.

Lösning. Vi får för partiella derivatorna av första ordningen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = z'_u - \tfrac{y}{x^2}z'_v,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \tfrac{1}{x}z'_v,$$

Samma användning av kedjeregeln upprepas nu på varje term i uttrycken för z'_x och z'_y. Vi ska ta hänsyn till att såväl z'_u som z'_v beror av både u och v, vilka i sin tur beror av x och y. Vi får till att börja med att

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(z'_u - \frac{y}{x^2} z'_v\right) = \frac{\partial}{\partial x}(z'_u) + \frac{2y}{x^3} z'_v - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(z'_v).$$

De två andra ordningens derivatorna i HL fås med hjälp av kedjeregeln som:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z'_u) = \frac{\partial}{\partial u}(z'_u)\cdot u'_x + \frac{\partial}{\partial v}(z'_u)\cdot v'_x = z''_{uu}\cdot 1 + z''_{vu}\cdot\left(-\tfrac{y}{x^2}\right) = z''_{uu} - \tfrac{y}{x^2} z''_{uv}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z'_v) = \frac{\partial}{\partial u}(z'_v)\cdot u'_x + \frac{\partial}{\partial v}(z'_v)\cdot v'_x = z''_{uv} - \tfrac{y}{x^2} z''_{vv}, \tag{1.3}$$

alltså

$$z''_{xx} = z''_{uu} - \tfrac{2y}{x^2} z''_{uv} + \tfrac{y^2}{x^4} z''_{vv} + \tfrac{2y}{x^3} z'_v.$$

Och vidare med hjälp av (1.3)

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{x} z'_v\right) = -\tfrac{1}{x^2} z'_v + \tfrac{1}{x}\tfrac{\partial}{\partial x}(z'_v) = -\tfrac{1}{x^2} z'_v + \tfrac{1}{x}\left(z''_{uv} - \tfrac{y}{x^2} z''_{vv}\right).$$

$$z''_{yy} = \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{x} z'_v\right) = \tfrac{1}{x}\tfrac{\partial}{\partial y}(z'_v) = \tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{x}(z'_v)'_v = \tfrac{1}{x^2} z''_{vv}$$

Vi får alltså från (1.1) att $x^2 z''_{uu} = 0 \Rightarrow z''_{vv} = 0$. Successiv integration ger

$$z'_u = g(v) \;\Rightarrow\; z = ug(v) + h(v) \Rightarrow\; z = xg(y/x) + h(y/x).$$

Villkoret $z(1, y) = 0$ ger $g(y) + h(y) = 0$ alltså $h(y) = -g(y)$, vilket ger

$$z(x, y) = (x - 1)g(y/x).$$

Nu koncentrerar vi oss på $z'_x(1, y) = y^2$. Vi får

$$z'_x = g\left(\tfrac{y}{x}\right) - (x - 1)g'\left(\tfrac{y}{x}\right)\cdot\tfrac{y}{x^2},$$

alltså

$$z'_x(1, y) = g(y) = y^2 \quad\Rightarrow\quad z(x, y) = (x - 1)g(y/x) = (x - 1)\tfrac{y^2}{x^2}.$$

Den sökta lösningen är alltså $z(x, y) = (x - 1)\frac{y^2}{x^2}$. □