# Kurvor,ytor. Gradient

## 5.1. Kurvor och ytor

En **parameterkurva** i $\mathbb{R}^n$ ges av

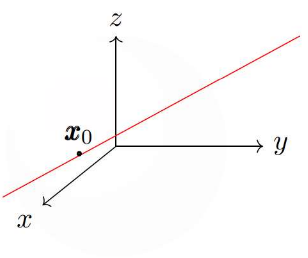
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Två kuvor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $t \in [a,b]$ och $\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{x}}(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ är **ekvivalenta** om de kan identifieras genom ett **parameterbyte**, d.v.s. om det finns en bijektion $t = g(\tau) : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ sådan att $\boldsymbol{x}(g(\tau)) = \widetilde{\boldsymbol{x}}(\tau)$. Vektorn $\boldsymbol{x}'(t)$ kallas för **tangentvektorn** till $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ i punkten $\boldsymbol{x}(t)$. Linjen

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t_0) + \boldsymbol{x}'(t_0)s, \quad s \in \mathbb{R}$$

kallas för **tangentlinjen** till $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ i punkten $\boldsymbol{x}(t)$.

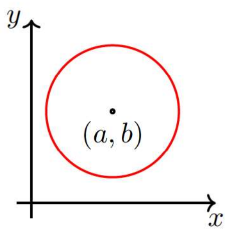
**Exempel 5.1.** Här kommer några exempel på *parametriserade kurvor*:



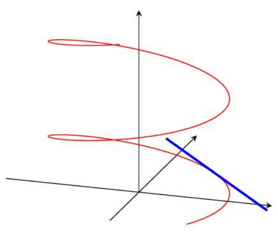

En **linje** in $\mathbb{R}^3$ genom punkten $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

med riktningsvektor $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ på parameterform ges av:

$$(x,y,z) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}t = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R}$$

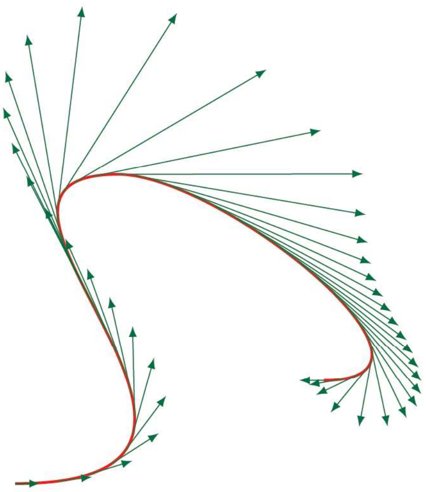



en **cirkel** i planet av radien $r$ med medelpunkt i $(a,b)$:
$$(x,y) = (a + r\cos t, b + r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi[$$



en **helix** i $\mathbb{R}^3$
$$(x,y,z) = (2\cos t, 2\sin t, 0.5t), \quad t \in \mathbb{R}$$
Tangentlinjen för $t = \pi/4$

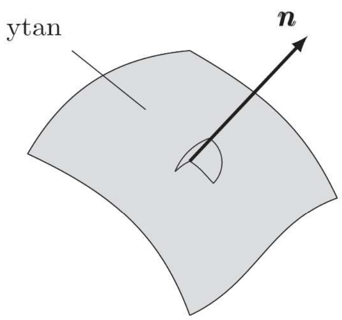
Geometrisk tolkning av tangentvektorn som hastighet:



**Längden** av en parameterkurva $\gamma : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$

$$\text{längden av } \gamma \ = \int_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{x}'(t)|\, dt.$$

En (**parametriserad**) yta ges av $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, t), \quad (s, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$.




**Normalvektor** i punkten $\boldsymbol{x}(s, t)$ ges av $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}'_s \times \boldsymbol{x}'_t$

**Normallinjen** genom punkten $\boldsymbol{x}(s, t)$ ges av

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s, t) + \boldsymbol{n}(s, t) \cdot r, \ r \in \mathbb{R}$$

Andra sätt att beskriva en yta i $\mathbb{R}^3$:

- som en *graf* (parameterfri): $z = f(x, y)$
- som en *nivåmängd*: $f(x, y, z) = C$.

**Definition 5.1.** För en differentierbar funktion $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, definierar vi **gradienten** av $\boldsymbol{f}$ i punkten $\boldsymbol{x}$ som <u>*vektorn*</u>:

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}).$$

**Exempel 5.2.** Bestäm normallinjen respektive tangentplanet till ytan $x^2yz = 2$ i punkten $(1, 1, 2)$.

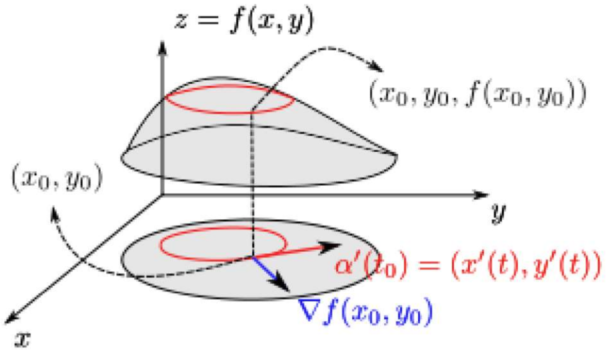
Låt $\gamma : \boldsymbol{x} = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ vara en parameterkurva och $f(x, y)$ en differentierbar funktion sådan att den sammansatta funktionen $f_\gamma(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$ är definierad. Då kan vi skriva **kedjeregeln** som **skalärprodukten**

$$\boxed{\frac{df_\gamma}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = \nabla f(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t)} \tag{5.1}$$

Observera att derivatan $\frac{df_\gamma}{dt}$ är hastighet hos funktionen $f_\gamma(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$, d.v.s. hastigheten av $f$ *längs kurvan* $\gamma$ i repsektive punkt. Om $f = konst$ längs kurvan $\gamma$ då gäller det att

$$\boxed{\frac{df_\gamma}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(\boldsymbol{x}(t)) \perp \boldsymbol{x}'(t)}$$

**Gradientens geometriska betydelse:** *gradienten av $f$ i en punkt $(x_0, y_0) \in D$ är ortogonal till nivåkurvan* $f(x, y) = f(x_0, y_0)$:




**Allmänt** gäller det att gradienten av $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ i en punkt $\boldsymbol{x}_0$ är ortogonal till nivåmängd $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$.

**Exempel 5.3.** Bestäm tangentplan till ytan $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ i punkten $(2, 2, 3)$.

*Lösning.* Låt $F(x) = z^2 - x^2 - y^2$. Då ytan är nivåmängden $F(x, y, z) = 1$. Vi har för gradienten:

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-2x, -2y, 2z), \qquad \nabla F(2, 2, 3) = (-4, -4, 6),$$

alltså är $\boldsymbol{n} = (2, 2, -3)$ en normal till tangentplanet i $(2, 2, 3)$. Det ger normalekvation

$$2x + 2y - 3z = C,$$

där $C$ fås ut ur villkoret att punkten $(2, 2, 3)$ liger i tanhentplanet, d.v.s. $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = C = -1$.

**Exempel 5.4.** Bestäm det tangentplan till ytan $z = x^2 + y^2$ som är parallellt med planet $2x - 3y + 4z = 5$.

*Lösning.* (I) Planets normalvektor är $\boldsymbol{n} = (2, -3, 4)$. Tangentplanets ekvation i punkten $(a, b, a^2 + b^2)$ ges av

$$z - (a^2 + b^2) = z'_x(a, b)(x - a) + z'_y(a, b)(y - a) = 2a(x - a) + 2b(y - b) \quad \Rightarrow \quad 2ax + 2by - z = a^2 + b^2.$$

Alltså:

$$\frac{2a}{2} = \frac{2b}{-3} = \frac{-1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = -1/4, b = 3/8$$

vilket ger tangentplanets ekvation (på normalform) $48y - 32x - 64z = 13$.

(II) **Alternativ lösning** m.h.a. gradient. Grafen $z = x^2 + y^2$ är 0-nivåmängd av en ny funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Då normalen $\boldsymbol{n} = (2, -3, 4)$ till $2x - 3y + 4z = 5$ ska vara parallell med gradienten $\nabla F(a, b, c)$ samt $F(a, b, c) = 0$ vilket ger

$$\nabla F(a, b, c) = (2a, 2b, -1) \parallel \boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad (2a, 2b, -1) \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6a + 4b = 0 \\ 8a + 2 = 0 \\ 8b - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -1/4, b = 3/8$$

## 5.2. Riktningsderivata

Observera att (5.1) visar att derivatan $\frac{df_\gamma}{dt}$ beror enbart på gradienten av $f$ och tangentvektorn till $\gamma$ i resp. punkten.

**Definition 5.2.** Med derivatan av $f(\boldsymbol{x})$ i punkten $\boldsymbol{a}$ med avseende på riktningen $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}| = 1$, menas gränsvärdet

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \frac{d}{dt}(f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}))\Big|_{\text{för } t=0}$$

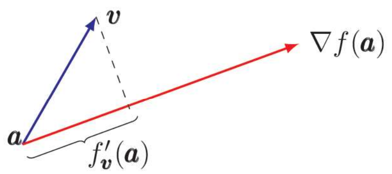
Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt}(f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot v_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}.}$$

Observera att om $|\boldsymbol{v}| = 1$ då

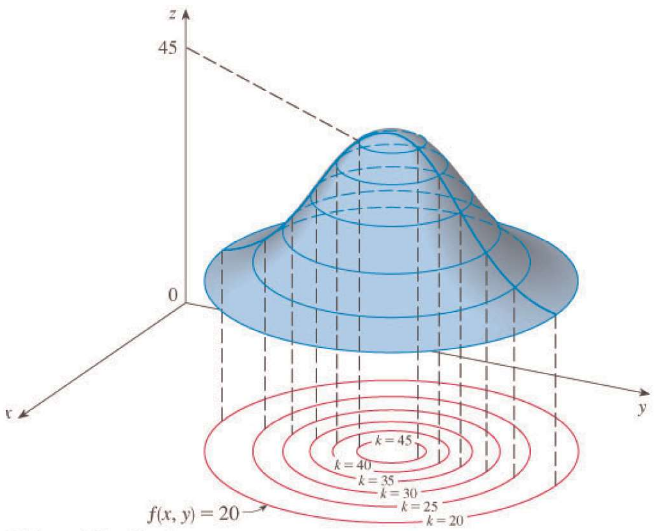
$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = |\nabla f(\boldsymbol{a})| \cdot \cos\alpha,$$

se bilden:




**Sats 8.** *Gradienten $\nabla f(\boldsymbol{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen $f$ växer snabbast i punkten $\boldsymbol{a}$, och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $|\nabla f(\boldsymbol{a})|$. Analogt, $-\nabla f(\boldsymbol{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen $f$ avtar snabbast i punkten $\boldsymbol{a}$.*

Lång gradent $\nabla f$ ger täta nivåkurvor, kort ger glesa.




**Exempel 5.5.** En bergsbestigare på berget $z = 20 - (x^4 + 2y^4)$ befinner sig i $(2, -1, 2)$ och går alltid i den riktning dår berget år brantast. Beskriv vägen till toppen.

*Lösning*: $\nabla z = (-4x^3, -8y^3)$, alltså $\nabla z(2, -1) = (-32, 8) \sim$ ( parallell med ) $\sim (-4, 1)$, alltså ska han gå i denna ritning.