Lokala undersökningar

6.1. Lokala extrempunkter: nödvändiga villkor

Definition 6.1. Låt $f = f(\boldsymbol{x})$ vara en funktion med definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$. f sägs att ha ett **lokalt maximum** i en punkt $\boldsymbol{a} \in D$ om det finns $\delta > 0$ sådant att

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{för alla} \quad \boldsymbol{x} \in D \text{ och } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta.$$

Punkten a kallas en **lokal maximipumkt** för f och funktionsvärde $f(\boldsymbol{a})$ kallas ett **lokalt maximivärde**. Om dessutom $f(x) < f(a)$ då $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ talar vi om en **sträng lokal maximipunkt** och ett **strängt lokalt maximivärde**. På motsvarande sätt definieras n (**sträng**) **lokal minimipunkt** och ett (**strängt**) **lokalt minimivärde**. Lokala maximi- och minimipunkter kallas för **lokala extrempunkter**.

Exempel 6.1. Undersök följande funktioner kring $(0,0)$:

a) $f(x,y) = 1 + |x| + y^2 - y^4$,

b) $g(x,y) = 2 + (2x - y)^2 - xy$.

Lösning. a) Observera att f inte är differentierbar i origo (p.g.a. absolutbelopet). Vi kan studera hur f beter sig längs varje koordinataxel:

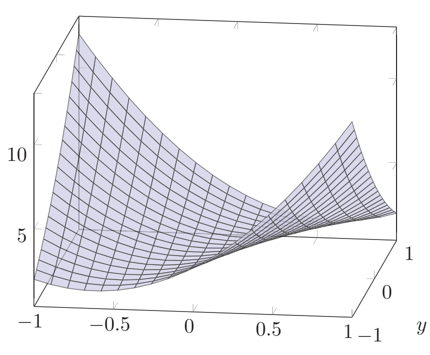
$$f(x,0) = 1 + |x| \geq 1 = f(0,0), \qquad \text{för \underline{alla} } x$$
$$f(0,y) = 1 + y^2(1 - y^2) \geq 1 = f(0,0) \qquad \text{för } y \text{ sådana att } |y| < 1.$$

Vi gissar att $(0,0)$ är en minimipunkt. Det stämmer eftersom **för alla** punkter (x,y) "nära origo" gäller att

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - 1 = |x| + y^2(1 - y^2) > 0 \qquad \text{för } (x,y) \neq (0,0) \text{ och } \max\{|x|,|y|\} < 1$$

d.v.s. $(0,0)$ är sträng lokal minimipunkt.

b) Om vi undersöker den andra funktioner med samma metod så får vi



$f(x,0) = 2 + 4x^2 > 2 = f(0,0)$, för alla $x \neq 0$

$f(0,y) = 2 + y^2 > 2 = f(0,0)$ för alla $y \neq 0$

däremot

$f(x,2x) = 2 - 2x^2 < 2$ för alla $x \neq 0$

Det betyder att $(0,0)$ är ingen extrempunkt (en *saddelpunkt*)

En viktig observation: det räcker *inte* med att gå längs enstaka kurvor för att bevisa *existens* av lokala max/min, däremot det kan räcka fär att *MOTbevisa*.

Sats 9. *Om funktionen $f(x)$ har lokalt extremvärde i en **inre** punkt $\boldsymbol{a}$ i definitionsmängden och om f är partiellt derivarbar i $\boldsymbol{a}$ så är $f'_{x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$ för alla i. Med andra ord,*

$$\boxed{\boldsymbol{a} \text{ är en extrempunkt} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\boldsymbol{a}) = 0.}$$

Bevis. Låt $n = 2$ och låt (a, b) vara ett lokalt extrempunkt, säg ett lokalt maximum. Betrakta funktionen av en variabel $g : x \to f(x, b)$. Så gäller det att $g(x)$ har ett lokalt maximum i a, alltså $g'(a) = 0$. Således $f'_x(a, b) = g'(a) = 0$. Alltså $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. □

Definition 6.2. En punkt $\boldsymbol{x} \in D_f$ i vilken gradient $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ kallas en **stationär** punkt.

$$\boxed{\boldsymbol{a} \text{ är en extrempunkt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \text{ är en stationär punkt.}}$$

Exempel 6.2. Låt $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$. De stationära punkterna fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 2x^2 - 2x + 4y = 0 \\ f'_y = -4y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \quad (0,0) \text{ eller } (-1,-1)$$

De stationära punkterna är således $(0, 0)$ eller $(-1, -1)$.

6.2. Taylors formel

Om $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) så gäller det att

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \sqrt{h^2+k^2}\,\omega(h,k) \\ &= \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + |\boldsymbol{h}|\omega(\boldsymbol{h}) \qquad \text{med} \quad \lim_{\boldsymbol{h} \to (0,0)} \omega(\boldsymbol{h}) = 0, \end{aligned}$$

Sats 10. *Låt $f(x, y) \in \mathscr{C}^3(D)$ i den öppna mängden $D \subset \mathbb{R}^2$ och att $\boldsymbol{a} = (a, b) \in D$. Då är*

$$\boxed{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{h}^t \text{Hess}\, f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^3),}$$

där

$$\text{Hess}\, f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\boldsymbol{a}) & f''_{xy}(\boldsymbol{a}) \\ f''_{xy}(\boldsymbol{a}) & f_{yy}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \qquad \text{*är **Hessianen** av f i $\boldsymbol{a}$*}$$

*Alternativt, gäller det en **Taylorsutveckling** av f kring $\boldsymbol{a}$:*

$$\boxed{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \underbrace{f'_x(\boldsymbol{a})h + f'_y(\boldsymbol{a})k}_{\text{approximationen av 1:a ordningen}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(f''_{xx}(\boldsymbol{a})h^2 + 2f''_{xy}(\boldsymbol{a})hk + f''_{yy}(\boldsymbol{a})k^2\right)}_{\text{approximationen av andra ordningen}=Q_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})} + \underbrace{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}B(h,k)}_{\text{restterm}},}$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Bevis. Idé: betrakta funktionen $F(t) = f(a+th, b+tk)$ av en variabel t, $0 \leq t \leq 1$ så att $F \in \mathscr{C}^3$ och således Maclaurins formel ger för $t = 1$:

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \frac{F'''(\theta)}{3!} \cdot 1^3$$

där $\theta \in]0,1[$. Vi får $F(0) = f(a,b)$ och och med hjälp av kedjeregeln:

$$\begin{aligned}
F'(0) &= f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k \\
F''(0) &= f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2 \\
F'''(\theta) &= \text{summa av termer } \tfrac{3!}{i!(3-i)!} f'''_{x^i y^{3-i}} h^i k^{3-i} \text{ som kan uppsakatas med } B \cdot (h^2+k^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

□

Exempel 6.2 (forts.) Vi utvecklar $f = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$ kring $(0,0)$. Partiella derivatorna i origo:

$$\begin{aligned}
f'_x &= 2x^2 - 2x + 4y \quad \Rightarrow \quad f'_x(0,0) = 0 \\
f'_y &= 4x - 4y \quad \Rightarrow \quad f'_y(0,0) = 0 \\
f'_{xx} &= 4x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'_{xx}(0,0) = -2 \\
f'_{xy} &= 4 \quad \Rightarrow \quad f'_{xy}(0,0) = 4 \\
f'_{yy} &= -4 \quad \Rightarrow \quad f'_{yy}(0,0) = -4,
\end{aligned}$$

alltså

$$\text{Hess}\, f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q_{(0,0)}(\boldsymbol{h}) = -2h^2 + 8hk - 4y^2$$

Således $f(h,k) = \underbrace{-2h^2 + 8hk - 4y^2}_{\frac{1}{2}Q_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{h})} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{h}|^3)$

Exempel 6.3. Använd kända Maclaurinutvecklingar från envariabelanalysen för att bestämma Maclaurinutvecklingar av ordning 2 med rest i ordoform till

$$f(x,y) = \sin(x+y)\ln(1+x-y).$$

Tips: använd polära koordinater för att uppskatta restermer. T.ex.

$$(x+y)^3 = \rho^3 \underbrace{(\cos\theta + \sin\theta)^3}_{\text{begränsad}} = O(\rho^3),$$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= x + y + O((x+y)^3) = x + y + O(\rho^3), \\
\ln(1+x-y) &= (x-y) + \tfrac{1}{2}(x-y)^2 + O((x-y)^3) = x - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 + O(\rho^3)
\end{aligned}$$

$$f(x,y) = (x + y + O(\rho^3)) \cdot (x - y + \tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 + O(\rho^3)) = x^2 - y^2 + O(\rho^3).$$

Observera att alla tredje ordningens stermer sådana som x^3, x^2y etc har formen $O(\rho^3)$. T.ex.

$$x^2y = \rho^3 \underbrace{\cos^2\theta \sin\theta}_{\text{begränsad}} = O(\rho^3)$$

6.3. Lokala extrempunkter: tillräckliga villkor

Antag att (a,b) är en stationär punkt, d.v.s. $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0 \Rightarrow$ första ordningens termer i Taylorsutveckling kring en stationär punkt försvinner:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \tfrac{1}{2}Q_{(a,b)}(h,k) + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}B(h,k) \approx$$
$$\approx \tfrac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2)$$

Sats 11. *Låt f vara av klass $\mathscr{C}^3$ och (a,b) en stationär punkt till f. Så gäller det fyra följande alternativ:*

*(1) $Q(h,k)$ är **positivt definit**, d.v.s. $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0) \Rightarrow$ ett **strängt lokalt minimum** i (a,b).*

*(2) $Q(h,k)$ är **negativt definit**, d.v.s. $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0) \Rightarrow$ ett **strängt lokalt maximum** i (a,b).*

*(3) $Q(h,k)$ är **indefinit**, d.v.s. $Q(h,k) > 0$ antar såväl positive som negativa värden. Då är (a,b) ingen extrempunkt. Man talar i stället om en **sadelpunkt** i (a,b).*

*(4) $Q(h,k)$ är positivt (eller negativt) **semidefinit**, d.v.s. $Q(h,k) \geq 0$ (resp. $Q(h,k) \leq 0$) och $Q(h,k) = 0$ för något $(h,k) \neq (0,0)$. I detta undantagsfall kan man inte använda Q för att dra slutsatser om karaktären av den stationära punkten (a,b).*

För $n \geq 3$ gäller motsvarande alternativen.

Exempel 6.2 (forts.) Vi undersöker $f = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$ $(0,0)$. Vi har sett att

$$Q_{(0,0)}(h,k) = -2h^2 + 8hk - 4y^2 = -2(h-2k)^2 + 4k^2,$$

alltså är $Q_{(0,0)}(h,k)$ en *indefinit quadratisk form*. Alternativt kan $Q_{(0,0)}(h,k)$ undersökas m.h.a. **spektralteorin**:

$$\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2 + 6\lambda - 8 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \lambda_1 = -3-\sqrt{17} < 0 \\ \lambda_1 = -3+\sqrt{17} > 0 \end{cases}$$

Exempel 6.4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(x,y,z) = 6xy + 6xz + 3y^2 - 3z^2 - x^3$$

Lösning. För att hitta stationära punkter sätter vi gradienten av f till noll:

$$\begin{cases} f'_x = -3x^2 + 6y + 6z = 0 \\ f'_y = 6x - 6y = 0 \\ f'_z = 6x - 6z = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = x \\ z = x \\ x^2 = 4x \end{cases}$$

Alltså har vi tvåstationära punkter: $A = (0,0,0)$ och $B = (4,4,4)$. Andraderivatorna är $f'_{xx} = -6x$, $f_{yy} = f_{zz} = -6$, $f_{yz} = 0$ och $f_{xy} = f_{xz} = 6$ vilket ger de kvadratiska formerna

$$\tfrac{1}{6}Q_A(h,k,l) = -k^2 - l^2 + 2hk + 2hl = -(k^2 - 2hk + l^2 - 2hl)$$
$$= -((k-h)^2 - h^2 + l^2 + 2hl) = -(k-h)^2 - (l-h)^2 + 2h^2$$

(**indefinit** ty positiv för $(h,k,l) = (1,1,1)$ och negativ för $(h,k,l) = (0,1,0)$, så origo är en **sadelpunkt**), och

$$\tfrac{1}{6}Q_B(h,k,l) = -4h^2 - k^2 - l^2 + 2hk + 2hl = -((k-h)^2 + 3h^2 + l^2 - 2hl)$$
$$= -((k-h)^2 + (l-h)^2 + 2h^2) = -(k-h)^2 - (l-h)^2 - 2h^2$$

(**negativt** definit, så $f(4,4,4) = 128$ är ett **lokalt maximum**).

Se även Hans Lundmark diskussion på TATA69 här:

http://courses.mai.liu.se/GU/TATA69/M/2014/TATA69-exempel-med-mera-ht2014.pdf