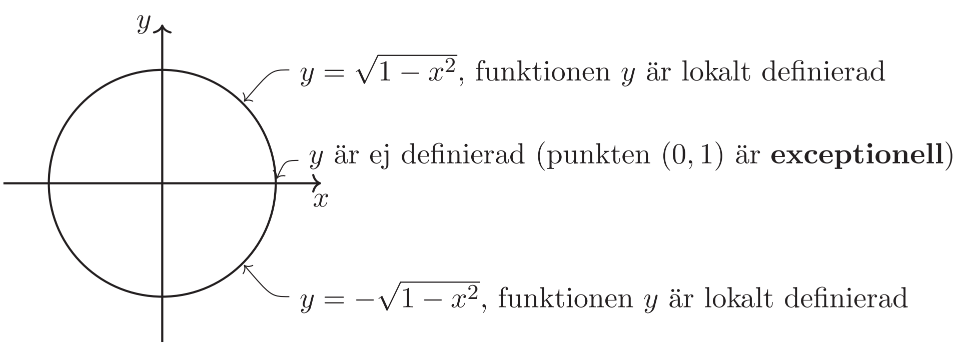
Implicit givna funktioner

7.1. Inledande exempel

Betrakta ekvationer med en och flera variabler:

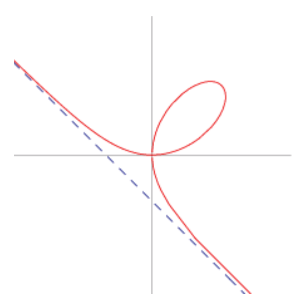
- $x^2 - 4x + 3 = 0$, en ekvation som kan lösas algebraiskt; lösningarna är $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$.
- $x^5 - x + 3 = 0$, det finns fem komplexa rötter men det **finns ingen formel** som genom successiva rotutdragningar (radikaler) ger lösningen till ekvationen (*Abels sats*, Nils Henrik Abel 1824).
- $y = x^2 - 2e^x$, en ekvation som definierar y som en **explicit** funktion
- $yx = 2$, funktionen y ges **implicit**. Funktionen y i detta fall kan även ges explicit: $y = 2/x$.

Exempel 7.1. Ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ definierar y som en **implicit** funktion. Här y kan även lösas ut lokalt, se bilden:



Exempel 7.2 (Descartes *folium*)**.** $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Med hjälp av substitutionen $y = tx$ kan ekvationen skrivas om som en parameterkurva:

$$x^3 + x^3t^3 - 3x^2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \tfrac{3t}{1+t^3} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$



7.2. Implicit givna funktioner

Allmänt kommer vi undersöka implicit givna funktioner av två eller flera variabler. Istället för att studera frågan huruvida en kurva kan ses som en funktionsgraf eller ej, så kommer vi att studera **frågan**: är det så att det, givet en punkt på kurvan, finns en *omgivning* av denna punkt i vilken kurvan kan ses som grafen till en funktion?

Vi studerar därför en kurva i planet given av ekvationen

$$F(x, y) = C.$$

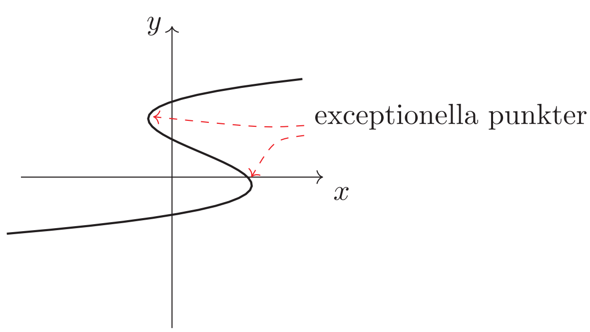
Noterar att vi kan tolka en sådan kurva som en *nivåkurva*.

Definition 7.1. Vi säger att ekvationen $F(x, y) = C$ **implicit definierar** en funktion $y = y(x)$.

Exempel 7.1 visar att vi kan hitta sådana omgivningar för varje punkt (a, b) på enhetcirkeln $x^2 + y^2 = 1$ förutom två exceptionella punkter där tangentkurvor är lodrätta, med andra ord

gradient i punkt (a, b) pekar horisontellt $\quad\Leftrightarrow\quad F'_y(a, b) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ punkten (a, b) är 'exceptionell'

se bilden



För att kunna se kurvan som en graf $y = f(x)$ så behöver vi alltså bara undvika exceptionella punkter vilket motiverar

Sats 12 (Implicita funktionssatsen)**.** *Låt $F(x, y)$ vara en $\mathscr{C}^1$-funktion och låt $F(a, b) = C$, d.v.s. punkten (a, b) hör nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om*

$$F'_y(a, b) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en $\mathscr{C}^1$-funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{7.1}$$

Observera att sambandet (7.2) kan fås via kedjeregeln genom att derivera $F(x, f(x)) = C$:

$$\boxed{\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = 0 \quad\Rightarrow\quad F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}}$$

Denna metod kallas **implicitderivering**.

Exempel 7.3. Visa att ekvationen $y^5 = 4xy + 1$ lokalt kring $(0,1)$ definierar en $\mathscr{C}^1$-funktion $y(x)$, och beräkna $y'(x)$ uttryckt i x och $y(x)$; ange speciellt $y(0)$ och $y'(0)$.

Lösning. Vi definierar $F(x,y) = V.L. - H.L. = y^5 - 4xy - 1$, alltså $F(0,1) = 0$ och $y(0) = 1$. Implicitderivering ger

$$0 = \frac{d}{dx}(y^5 - 4xy - 1) = 5y^4y' - 4y - 4xy' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{4y}{5y^4 - 4x} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1^4 - 4 \cdot 0} = \frac{4}{5}$$

Alternativt, med hjälp av (7.2):

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{4y}{5y^4 - 4x}.$$

Det går att **generalisera** Implicita funktionssatsen till att hantera *nivåytor*

$$F(x,y,z) = C$$

i *rummet*. Om $F(a,b,c) = C$ och

$$F'_z(a,b,c) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a,b,c) i rummet sådan att restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en $\mathscr{C}^1$-funktion $z = f(x,y)$ och

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \qquad f'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{7.2}$$

Exempel 7.4. Betrakta ekvationen

$$2x + \exp(-y^2)\sin x = yz.$$

Låt $F(x,y,z) = 2x + \exp(-y^2)\sin x - yz$.

(i) Eftersom $|\cos x| \leq 1$, får vi

$$F'_x = 2 + \exp(-y^2)\cos x \geq 2 - \exp(-y^2) \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

alltså $F'_x(x,y,z) \neq 0$ för <u>alla</u> $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, vilket ger m.h.a. implicita funktionssatsen att $x = x(y,z)$ exiterar <u>lokalt</u> kring varje punkt $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ som löser ekvationen $F(x,y,z) = 0$.

(ii) Antag att $(y,z) = (a,b)$ är en godtycklig punkt i planet. Vi undersöker ekvationen

$$g(x) := 2x + \exp(-a^2)\sin x - ab = 0$$

med avseende på x. Eftersom $g'(x) = F'_x(x,a,b) \geq 1 > 0$, funktionen $g(x)$ är strängt växande. Å andra sidan, $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$, alltså satsen om mellanliggande värden (från envariabelanalys) medför att det existerar x sådant att $g(x) = 0$ och ett sådant x är entydigt bestämt.

Detta resonemang visar att $F = 0$ definierar en funktion $x(y,z)$ i hela yz-planet och (m.h.a. implicita funktionssatsen) också att denna funktion faktiskt är $\mathscr{C}^1$.

7.3. Implicita funktionssatsen för system

Betrakta ett linjärt system

$$\begin{cases} f := a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ g := a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Geometriskt är lösningsmängd skärningen mellan två plan $f = d_1$ och $g = d_2$. Skärningen är en linje. Om man vill parametrisera linjen med hjälp av t.ex. $z = t$ så är det ekvivalent till att systemet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ z = t \end{cases}$$

är lösbart för varje t, vilket i sin tur är ekvivalent till att

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi ska studera huruvida detta kan generaliseras för *ickelinjära avbildningar.*

Sats 13 (Implicita funktionssatsen för system)**.** *Låt $F(x, y, z)$ och $G(x, y, z)$ är $\mathscr{C}^1$-funktioner och (a, b, c) är en lösning till systemet*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases} \tag{7.3}$$

Antag att determinanten

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

i en punkt (a, b, c) på skärningen (7.3). Då finns en omgivning av denna punkt i vilken (7.3) bestämmer två $\mathscr{C}^1$-funktioner

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

Exempel 7.5. Visa att ekvationsystem

$$\begin{cases} F = \sin x - e^y + z^2 = 0 \\ G = x^2 + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

kring $(0, 0, 1)$ definierar $\mathscr{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$, och beräkna $x(1), y(1)$, och ange hur man får $x'(1), y'(1)$.

Lösning.

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -e^y \\ 2x & 1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(F, G)}{d(x, y)}(0, 0, 1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Implicitderivering m.a.p. x:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\sin x - e^y + z^2) = 0 \\ \frac{d}{dz}(x^2 + y - z + 1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x x' - e^y y' + 2z = 0 \\ 2xx' \quad + y' \ - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos x & -e^y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

I punkten $(0, 0, 1)$: $x(1) = y(1) = 0$ och

$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos x + 2xe^y} \begin{pmatrix} 1 & e^y \\ -2x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{\text{i } (0,0,1)} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$