Optimering

8.1. Optimering på kompakta mängder

Exempel 8.1. Bestäm största och minsta värde (om de finns) av $f(x) = 2x^2|x| - 6x$ på $[-2, 2]$.

Lösning. **Existens**: funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och mängden $[-2, 2]$ är sluten och begränsad, alltså existerar både största och minsta värde. Vi delar upp undersökning av *kandidater* i tre delar: (i) inre punkter där derivata existerar (i så fall ska derivata vara 0); (ii) inre punkter där derivata **inte** existerar (i så fall det är en kandidat automatiskt!); (iii) randpunkter.

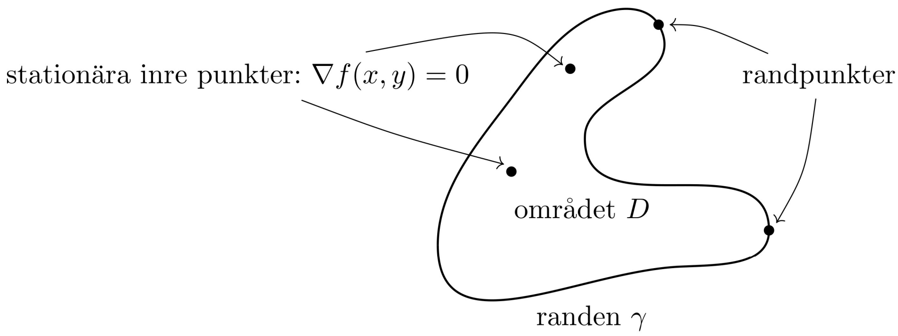
Kandidatjakt: (i) Inre punkter där derivata existerar: $(-2, 0) \cup (0, 2)$ och

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x, & \text{om } x \in (0, 2); \\ -2x^3 - 6x, & \text{om } x \in (0, 2), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 6x^2 - 6, & \text{om } x \in (0, 2); \\ -6x^2 - 6, & \text{om } x \in (0, 2), \end{cases}$$

Alltså $f'(0)$ ger bara en kandidat $\boxed{x = 1}$ (eftersom $x = -1$ inte ligger i $(0, 2)$). (ii) Derivatan saknas i en inre punkt $x = 0$ (en kandidat till) samt (ii) det finns två randpunkter: $x = \pm 2$.

Optimering: $\boxed{f(-2) = 28}$, $f(0) = 0$, $\boxed{f(1) = -4}$, $f(2) = 4$, vilket medför att $f_{max} = f(-2) = 28$ och $f_{min} = f(1) = -4$.

Allmänt: enligt Satsen 1, kap. 2.3, vet vi att en kontinuerlig funktion på ett kompakt (= begränsat och slutet) område D alltid antar ett största och ett minsta värde. För att bestämma dessa är det tillräckligt att ta fram alla punkter ('kandidater') där största och minsta värde kan finnas och sedan jämföra funktionsvärdena i dessa.



Sammanfattningsvis, samtliga punkter där största och minsta värde kan förekomma:

A) stationära **inre** punkter.
Analys: lös $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ och sortera bort alla punkter som inte ligger i D;

B) **randpukter** till området.
Analys: representera randen som unionen av kurvor och parametrisera dessa; optimera restriktionen av f (envariabelfunktion) på varje kurva.

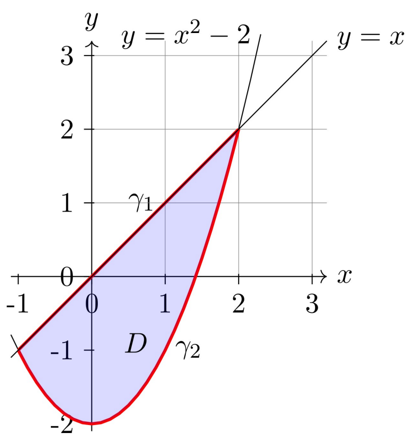
C) inre punkter där gradienten f **ej existerar**.

Exempel 8.2. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$ på den slutna mängd som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2 - 2$.

Lösning. A) Inre stationära punkter:

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_x = 4x = 0 \\ f'_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (0, \frac{1}{2}) \notin D$$

vilket ej är en inre punkt till vårt område.



B) Vi undersöker nu f på randen. Del γ_1 (se figuren) kan parametriseras enligt $(x,y) = (t,t)$, $t \in [-1,2]$. Detta ger:

$$f(t,t) = 2t^2 + t^2 - t = 3t^2 - t = g_1(t).$$

Vi skall alltså optimera g_1 på det kompakta intervalet $[-1,2]$: stationära punkter fås genom $g_1'(t) = 6t - 1 = 0$, $t = \frac{1}{6} \in [-1,2]$, ligger inom intervallet. Funktionsvärde:

$$\boxed{g_1(\tfrac{1}{6}) = -\tfrac{1}{12}.}$$

Ändpunkterna:

$$\boxed{g_1(-1) = 4, \qquad g_1(2) = 10.}$$

Del γ_2 (parabelns segment) kan parametriseras enligt $(x,y) = (t, t^2 - 2)$, $t \in [-1,2]$. Detta ger:

$$f(t,t) = 2t^2 + (t^2-2)^2 - t^2 + 2 = t^4 - 3t^2 + 6 = g_2(t).$$

Vi får

$$g_2' = 4t^3 - 6t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 0 \in [-1,2] \text{ eller } t_2 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \in [-1,2]$$

Funktionsvärde:

$$\boxed{g_2(0) = 6, \qquad g_2(\sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \tfrac{15}{4}}$$

Nu beräknas värde i ändpunkterna (observera att dessa sammanfaller med resp. värde ovan!):

$$\boxed{g_2(-1) = 4, \qquad g_2(2) = 10.}$$

C) Det finns inga punkter i vilka f ej är differentierbar, så va har nu fått fram alla intressanta punkter:

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \max\{-\tfrac{1}{12}, 4, 10, 6, \tfrac{15}{4}\} = 10$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \min\{-\tfrac{1}{12}, 4, 10, 6, \tfrac{15}{4}\} = -\tfrac{1}{12}$$

□

8.2. Optimering på ickekompakta mängder

Om mängden D inte längre är kompakt **kan man inte** konstatera *a priori* att max eller min existerar.

Exempel 8.3. Undersök $f(x,y,z) = x^2 - 2zx$ på ett öppet klot $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$.

Lösning. Målfunktionen $f(x,y,z)$ är deriverbar. Observera att D inte innehåller några randpunker $\Rightarrow$ om (x,y,z) är en global extrempukt så blir den även en stationär punkt automatiskt! **Kandidatjakt**: $\nabla f(x,y,z) = (2x-z, 0, -x) = \mathbf{0}$ ger en kandidat $(0,0,0)$ som ligger i D. En lokal undersökning kring $(0,0,0)$ ger vadratiska formen $Q_{(0,0,0)}(h,k,l) = 2h^2 - 4hl$ som är **indefinit** ($Q(1,0,0) = 2 > 0$ och $Q(1,0,1) = -2 < 0$), alltså är $(0,0,0)$ ingen lokal extrempunkt, d.v.s. varken största eller minsta värde existerar.

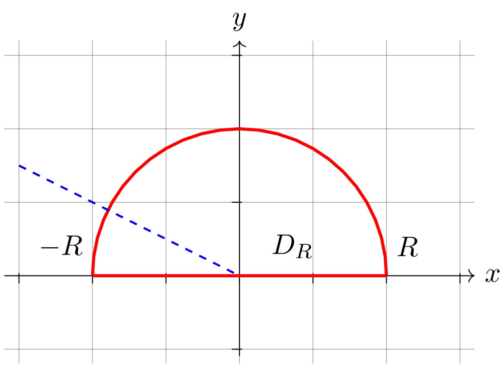
Observera att i fall om mängden D är öppen så gäller det alltid att kandidater måste vara stationära punkter! I fall om mängden D är varken öppen eller sluten (och begränsad) blir analysen svårare.

Man ska studera både funktionen och (icke-kompakta) området i varje enkilt fall och bestämma vilken metod är lämpligt att använda. Huvudidé här är att ersätta den givna definitionsmängden med ett lämpligt **kompakt** område på vilket metoden av föregående avsnitt kan appliceras.

Exempel 8.4. Vi vill undersöka om funktionen $f(x,y) = (x+y)\exp(-x^2-y^2)$ antar något största eller minsta värde i övre halvplanet $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

Först obsrevera att i polära koordinater

$$|f(x,y)| = |x+y| \cdot \exp(-x^2-y^2) = \rho e^{-\rho^2}|\cos\phi + \sin\phi| \leq 2\rho e^{-\rho^2} \to 0 \qquad \text{då } \rho \to \infty.$$



Det betyder att till varje positiva $\varepsilon > 0$ existerar $R > 0$ sådant att

$$|f(x,y)| < \varepsilon, \tag{8.1}$$

för alla punkter (x,y) som ligger *utanför* halvcirkelskivan

$$D_R := \{(x,y) : y \geq 0 \text{ och } x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

Observera också att funktionen antar både positiva och negativa värde i D (funktionen är lika med noll längs linjen $y = -\frac{1}{2}x$, $x \geq 0$, se den streckade blåa linjen). Alltså verkar det rimpligt att man kan välja $\varepsilon > 0$ så att *både* största och minsta värdena ska ligga innanför området D_R.

Nu studerar vi detta på ett mer strikt sätt. För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = (1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = (1-2y(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2x(x+y) \\ 1 = 2y(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 = 4x^2 \end{cases}$$

vilket ger $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eller $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Den andra punkten ligger inte i D. Vi får alltså

$$\boxed{f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

Vi undersöker nu funktionen på randen $y = 0$:

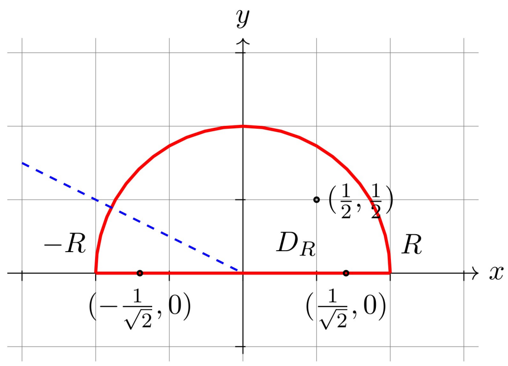
$$g(t) = f(t, 0) = te^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $g'(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$ har vi teckenväxlingsschemat

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	lok.max.	$\searrow$

Detta ger två intressanta punkter till:

$$\boxed{f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\tfrac{1}{\sqrt{2e}}, \qquad f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2e}},}$$



Låt ε väljs godtyckligt sådant att $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Låt $\boxed{R > 2}$ vara sådant att (8.1) håller för detta ε. Betrakta det *kompakta* området D_R. Då finns det både största och minsta värde på halvcirkelskivan D_R och enligt ovan:

$$\boxed{\max_{D_R} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \qquad \min_{D_R} f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}.}$$

Eftersom $|f(x, y)| < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2e}}$ för alla $(x, y) \in D \setminus D_R$ så är $\frac{1}{\sqrt{e}}$ resp. $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ därmed största resp. minsta värde i hela D.