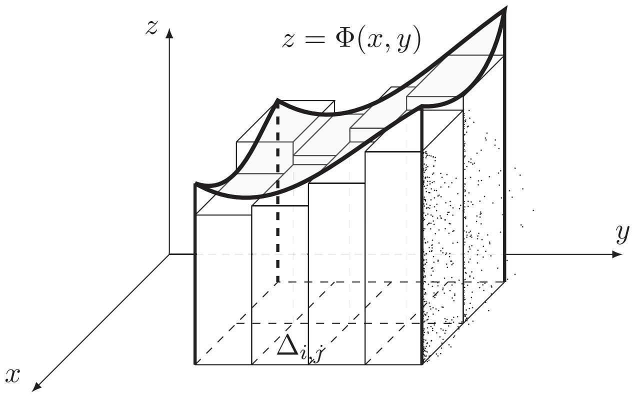
Dubbelintegraler

10.1. Dubbelintegraler över rektangel

Idé är att approximera grafen till en kontinuerlig funktion med trappfunktioner:



En **trappfunktion** Φ av två variabler är en funktion som är definierad i en *axelparallell* rektangel

$$\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\},$$

och som har egenskapen att det finns en indelning av Δ i mindre rektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x < x_i,\ y_{j-1} \leq y < y_j\}$$

på sådant sätt att Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij}:

$$\Phi(x, y) = c_{ij} \quad \text{då} \quad (x, y) \in \Delta_{ij},$$

Grafen av en sådan funktion Φ generar ett antal rätblock med sidorna parallella med koordinataxlarna.

Definition 10.1. Dubbelintagralen av Φ över Δ definieras som talet

$$\iint_\Delta \Phi(x, y)\, dxdy := \sum_{i,j} c_{ij} \cdot \text{Arean}(\Delta_{ij}) = \sum_{i,j} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}).$$

- Integralen av Φ tolkas som den totala **volymen av rätblocken i figuren**. Speciellt,

  $$\iint_\Delta 1\, dxdy = \text{Arean}(\Delta).$$

  Observera dock att staplar som ligger under xy-planet ger negatvt bidrag till integralen.
- En ytterligare uppdelning av en eller flera rektanglana Δ_{ij} i mindre delrektanglar kallas en **förfining** av den ursprungliga indelningen av Δ. Integralen av Φ över Δ påverkas inte av en sådan förfining.

- Integralen **beror linjärt på integranden**:

$$\iint_\Delta \alpha\Phi(x,y)\,dxdy = \alpha \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{10.1}$$

$$\iint_\Delta (\Phi(x,y)+\Psi(x,y))\,dxdy = \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy + \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy. \tag{10.2}$$

- Det gäller **monotonicitetsprincipen**

$$\Phi \le \Psi \quad \text{på} \quad \Rightarrow \quad \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy, \tag{10.3}$$

- Det gäller **'triangelolikheten'**

$$\left| \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy \right| \le \iint_\Delta |\Phi(x,y)|\,dxdy. \tag{10.4}$$

- Integralen är **additiv**: om Δ_1 och Δ_2 är två rektanglar som enbart har en gemensam sida så gäller

$$\iint_{\Delta_1} \Phi(x,y)\,dxdy + \iint_{\Delta_2} \Phi(x,y)\,dxdy = \iint_{\Delta_1\cup\Delta_2} \Phi(x,y)\,dxdy \tag{10.5}$$

- Det gäller sambandet mellan dubbelintegral och **itererad (enkel)integral**:

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(x,y)\,dx \right)\,dy \tag{10.6}$$

  Den första likhet betyder att volymen av rätblocken i figuren alternativt kan räknas med hjälp av snittytor av de rätblok som bestäms av Φ skärs med ett plan genom $(x,0,0)$ ortogonalt mot x-axeln.

Nu låt f vara en godtycklig begränsad funktion på Δ. Då existerar två konstanter $m \le M$ sådana att $m \le f(x,y) \le M$ i Δ. Det betyder att det finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att

$$\Phi(x,y) \le f(x,y) \le \Psi(x,y), \quad (x,y) \in \Delta. \tag{10.7}$$

Definition 10.2. Vi säger att f är (**Riemann**) **integrerbar** över rektangeln Δ om det till varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \le f \le \Psi$ och

$$\iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy < \epsilon.$$

Sats 15. *Om f är integrerbar över rektangeln Δ så finns precis ett tal I med egenskapen att*

$$\iint_\Delta \Phi(x,y)\,dxdy \le I \le \iint_\Delta \Psi(x,y)\,dxdy$$

för alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \le f \le \Psi$.

Låt f vara integrerbar över Δ. Det entydigt bestämda talet I i Sats 15 kallas **dubbelintegralen** av f över Δ,

$$I = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy.$$

Sats 16 (Upprepad integration)**.** *Om f är integrerbar över $\Delta = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ och om integralen i högra led existerar så gäller*

$$\boxed{\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)}_{\text{tvärsnittsarean } A(x) \text{ vid } x}\,dx.} \tag{10.8}$$

Motsvarande utsaga gäller också med omvänd integrationsordning i högerledet.

Bevis. För alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \le f \le \Psi$ och för alla $x \in [a,b]$ gäller

$$\int_c^d f\,dy \le \int_c^d \Psi\,dy \quad\Rightarrow\quad \int_a^b \left(\int_c^d f\,dy\right)dx \le \int_a^b \left(\int_c^d \Psi\,dy\right)dx \overset{\text{m.h.a. (10.6)}}{=} \iint\limits_{\Delta} \Psi\,dxdy,$$

alltså

$$\iint\limits_{\Delta} \Phi\,dxdy \le \int_a^b \left(\int_c^d f\,dy\right)dx \le \iint\limits_{\Delta} \Psi\,dxdy,$$

vilket betyder att $\int_a^b \left(\int_c^d f\,dy\right)dx$ uppfyller vilkoret på I i Sats 15. Eftersom f är integrerbar över Δ finns precis ett sådant I, v.s.b. $\square$

Sats 17. *Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på Δ så är f integrerbar över Δ och formeln* (10.8) *gäller.*

Exempel 10.1. Låt Δ vara rektangeln $-1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$. Beräkna

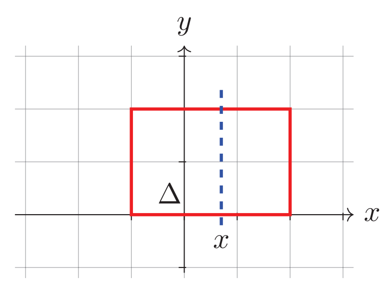
$$I := \iint\limits_{\Delta} (x^2 - 2y)\,dxdy.$$

Lösning. Integranden är kontinuerlig på Δ, varför får vi beräkna integralen med itererad integration. Först bestämmer vi för fixt x:

$$A(x) = \int_0^2 (x^2 - 2y)dy = \left[x^2y - y^2\right]_{y=0}^{y=2} = 2x^2 - 4.$$

Därefter erhålles dubbelintegralen som

$$I = \int_{-1}^2 A(x) = \int_{-1}^2 (2x^2 - 4)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x\right]_{-1}^2 = -6.$$

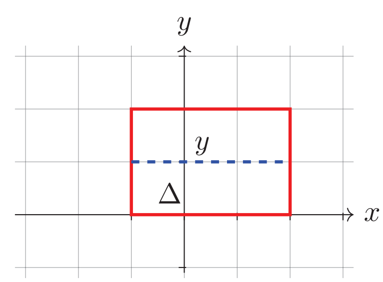


Detta problem kan också lösas genom att man integrerar först med avseende på x:

$$A(y) = \int_{-1}^2 (x^2 - 2y)dy = \left[\frac{x^3}{3} - 2yx\right]_{x=-1}^{x=2} = 3 - 6y,$$

alltså

$$I = \int_0^2 A(y)dy = \int_0^2 (3 - 6y)dy = \left[-3y^2 + 3y\right]_0^2 = -6.$$



10.2. Integration över godtyckliga områden

Definition 10.3. En begränsad funktion f på en begränsad mängd D kallas **integrerbar över** D om

$$f_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y) \text{ när } (x,y) \in D \\ 0 \text{ när } (x,y) \notin D \end{cases}$$

är integrerbar över någon rektangel Δ som omfattar D. Vi sätter då

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy := \iint\limits_{\Delta} f_D(x,y)\,dxdy.$$

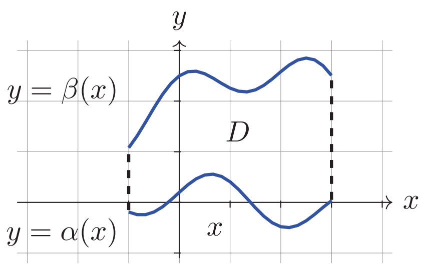
- Definitionen påstår indirekt att integrerbarheten och integralen är oberoende av vilken rektangel $\Delta \supset D$ vi väljer.
- Om f och g är integrebara över D så gäller egenskaperna (10.1)–(10.5) med $\Phi \rightsquigarrow f$ och $\Psi \rightsquigarrow g$.

Definition 10.4. En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ kallas en **nollmängd** om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt antal axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ. En mängd D kallas **kvadrerbar** (eller **mätbar**) om des rand är en nollmängd.

• En kurva i $\mathbb{R}^2$ är en nollmängd, alltså ett område vars rand består av sådana kurvor är kvadrerbar.

Sats 18. *Om f är kotinuerlig och begränsad på en kvadrerbar kompakt mängd D då är f integrerbar över D.*

Sats 19 (Upprepad integration). *Om f är kontinuerlig på en mängd $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ a \le x \le b\}$, där $\alpha(x) \le \beta(x)$ är kontinuerliga, så är f integrerbar över D och*



$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.} \qquad (10.9)$$

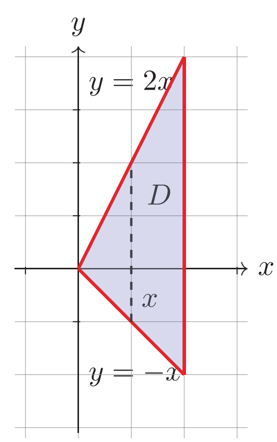
Motsvarande formel gäller också för integration först i x-led och därefter i y-led.

Exempel 10.2. Låt D vara triangeln $-x \le y \le 2x$, $0 \le x \le 2$. Beräkna

$$I := \iint_\Delta 2xy\,dxdy$$

Lösning. Vi börjar i y-led: vi låter först y gå mellan $-x$ och $2x$, och sedan x från 0 till 2:

$$\iint_D 2xy\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{y=-x}^{y=2x} 2xy\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[xy^2 \right]_{y=-x}^{y=2x} dx$$
$$= \int_0^2 3x^3\,dx = \left[\frac{3x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=2} = 12.$$



Om vi integrerar i x-led först så får vi problemet att den undre gränsen inte blir densamma för hela området. För positiva y så har vi som tidigare $y = 2x \Rightarrow x = y/2$, men för negativa y blir den undre gränsen $y = -x \Rightarrow x = -y$:

$$\iint_D 2xy\,dxdy = \iint_{D_1} 2xy\,dxdy + \iint_{D_2} 2xy\,dxdy =$$
$$= \int_{-2}^0 \left(\int_{x=-y}^{x=2} 2xy\,dx \right) dy + \int_0^4 \left(\int_{x=y/2}^{x=2} 2xy\,dx \right) dy =$$
$$= \int_{-2}^0 \left[yx^2 \right]_{x=-y}^{x=2} dy + \int_0^4 \left[yx^2 \right]_{x=y/2}^{x=2} dy =$$
$$= \int_{-2}^0 (4y - y^3)\,dy + \int_0^4 (4y - \tfrac{1}{4}y^3) dy =$$
$$= -4 + 16 = 12.$$