Funktionalmatriser. Variabelbyte i integraler

11.1. Funktionalmatriser. Funktionaldeterminanter

Låt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, där

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_p(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

vara en avbildning av typen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ som är definierad i en öppen delmängd av $\mathbb{R}^n$. Avbildningen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ kallas **differentierbar** i punkten $\boldsymbol{a}$ om det existerar en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sådan att

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}\| = \omega(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|, \qquad \text{där } \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \omega(\boldsymbol{h}) = 0.$$

T ex varje linjär avbildning är differetierbar. Allmänt gäller det:

Sats 20. *Avbildningen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ $\Leftrightarrow$ varje komponent $f_j(\boldsymbol{x})$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$. Om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ så*

$$A = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \equiv \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Vi säger att $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ är av klassen $\mathscr{C}^1$ om varje komponent är av klassen $\mathscr{C}^1$.

Matrisen $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ i (11.1) kallas **funktionalmatris** (eller **Jacobimatris**) och dess determinant kallas **funktionaldeterminant** (eller **jacobian**):

$$\frac{d(f_1, \dots, f_p)}{d(x_1, \dots, x_n)} := \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right)$$

Betrakta en $\mathscr{C}^1$ avbildning $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Då gäller det

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}. \tag{11.2}$$

Avbildningen $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$. kallas **linjärisering** av $\boldsymbol{f}$ i punkten $\boldsymbol{a}$.

Exempel 11.1. Funktionalmatrisen av en reellvärd funktion $y = f(x_1, x_2, x_3)$ är dess gradien:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})).$$

Exempel 11.2. Om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ är en linjär avbildning så är A funktionalmatrisen av $\boldsymbol{f}$.

Exempel 11.3. Betrakta polära koordinater $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\cos\varphi \end{cases}$. Eftersom

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi,$$

har denna avbildning från $r\varphi$-planet till xy-planet funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

med funktionaldeterminanten

$$\boxed{\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = r.}$$

Exempel 11.4. På liknande sätt, om

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

är rymdpolära koordinater så får vi funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

med funktionaldeterminanten

$$\boxed{\frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta.}$$

11.2. Kedjeregeln. Inversfunktion. Areaskalan

Betrakta en sammansatt funktion $\boldsymbol{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}\circ\mathbf{g}(\mathbf{t})$ av typen. $\mathbb{R}^q \overset{\mathbf{g}}{\mapsto} \mathbb{R}^n \overset{\mathbf{f}}{\mapsto} \mathbb{R}^p$ En direktföljd av kedjeregeln är

$$\boxed{(\boldsymbol{f}\circ\mathbf{g})' = \boldsymbol{f}'\cdot\mathbf{g}'}.$$

Sats 21 (Inversa funktionssatsen). *Låt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en $\mathscr{C}^1$-avbildning och $\boldsymbol{a}$ vara en punkt i definitionsmängden sådan att*

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

Då finns öppna omgivningar U och V av $\boldsymbol{a}$ resp. $\mathbf{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ sådana att avbildningen $\boldsymbol{f} : U \to V$ är bijektiv och inversen $f^{-1} : V \to U$ är en avbildning av klassen $\mathscr{C}^1$.

Låt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en avbildning och P en liten axelparallell rektangel nära punten $\boldsymbol{a} \in D_{\boldsymbol{f}}$. Då har vi enligt (11.2) att för små $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^2$, kan $\boldsymbol{f}$ approximeras med hjälp av

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h},$$

d.v.s. en sammansatt linjär avbildning $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}$ följd av förskjutningen $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{y}$. Eftersom förskjutningen påverkar inte arean, får vi den **lokala areaförstörningen** under avbildningen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$:

$$\boxed{\frac{\text{arean av } \boldsymbol{f}(P)}{\text{arean av } P} \approx |\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})|}$$

Exempel 11.5. Betrakta avbildningen $\boldsymbol{f} := \begin{cases} u &= xy \\ v = x + y \end{cases}$. Visa att avbildningen i någon omgivning till $(x, y) = (2, 3)$ har en $\mathscr{C}^1$-invers som är definierad i en motsvarande omgivning till $(6, 5)$. Beräkna $x'_u(6, 5)$ och $x'_v(6, 5)$.

Lösning. Enligt kedjeregeln ovan, $\boldsymbol{f}' \cdot (\boldsymbol{f}^{-1})' = \mathbf{I}$, enhetsmatrisen, alltså

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}.$$

Eftersom

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(2, 3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(6, 5) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Identifiering ger: $x'_u(6, 5) = 1$ och $x'_v(6, 5) = -2$.

11.3. Riemannsummor. Variabelbyte i dubbelintegraler

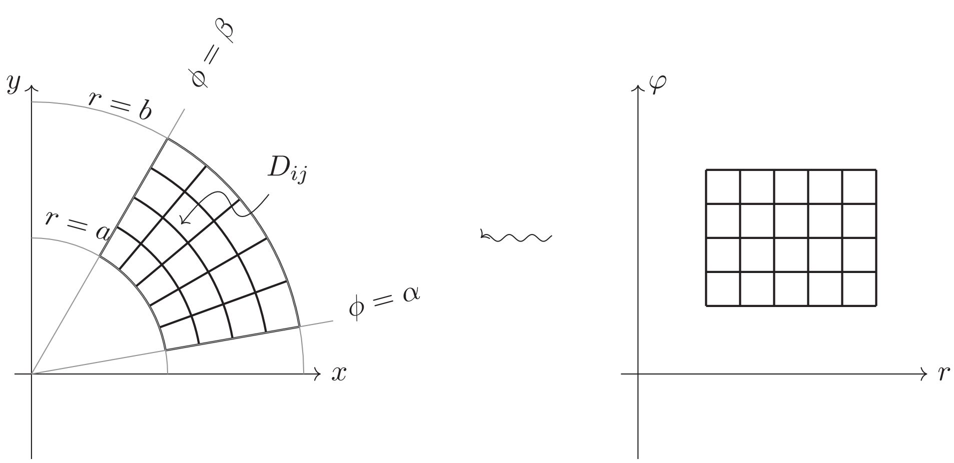
Låt f vara en kontinuerlig funktion definierad på en kompakt rektangel Δ. Antag att Δ är indelad i delrektanglar Δ_k och att vi för varje sådan delrektangel valt en punkt $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{\Delta_k}$. Summan

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k)\text{Arean}(\Delta_k)$$

kallas **Riemannsumma**. Formelmässigt kan vi skriva att

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k) \to \iint_\Delta f(x, y)\, dxdy \quad \text{vid obegränsad förfinad indelning}$$

Exempel 11.6 (Areaskalan för polära koordinater)**.** Låt D vara den slutna sektorringen som ges i polära koordinater av $a \le r \le b$ och $\alpha \le \varphi \le \beta$. Vi delar in D i små sektorringar $D_{ij} = \{r_{i-1} \le r \le r_i, \varphi_{j-1} \le \varphi \le \varphi_j\}$:



vilket ger

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy \approx \sum_k f(\xi_{ij},\eta_{ij})\text{Arean}(D_{ij}) = \sum_k f(\xi_{ij},\eta_{ij})\frac{\text{Arean}(D_{ij})}{\text{Arean}(\Delta_{ij})}\cdot \text{Arean}(\Delta_{ij}) \approx$$
$$\approx \iint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,drd\varphi$$

Exempelvis, om D är en cirkelring $1 \le x^2+y^2 \le 4$ så $\Delta = \{1 \le r \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, alltså

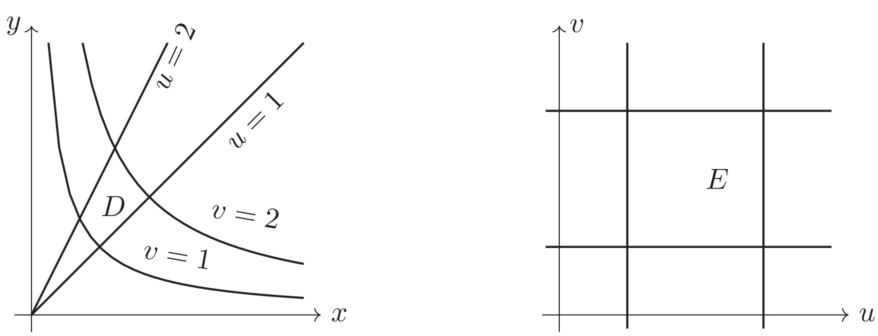
$$\iint_D x^2\,dxdy = \iint_\Delta (r\cos\varphi)^2\cdot r\,drd\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)d\varphi = \left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{15\pi}{4}$$

Sats 22. *Låt $(x,y) = (g(u,v),h(u,v))$ vara en bijektiv $\mathscr{C}^1$-avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv-planet på ett motsvarande område D i xy-planet, sådan att $J(u,v) = \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \neq 0$ i E. Då r*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\cdot|J(u,v)|\,dudv.$$

Exempel 11.7. Beräkna $\iint_D xy\,dxdy$ där D ges av $x \le y \le 2x$, $1 \le xy \le 2$ i den första kvadranten $x \ge 0, y \ge 0$.

Lösning. Ett naturligt variabelbyte: $u = y/x$ och $v = xy$, se bilden. Avbildningen är bijektiv i D och beskriver en axelparallell rektangel $E = \{1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$ i uv-planet.



Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} = -2u \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \left|\left(\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right)^{-1}\right| = \frac{1}{2u}\ \text{(för positiva } u\text{)}$$

alltså

$$\iint_D xy\,dxdy = \iint_E v\cdot\frac{1}{2u}\,dudv = \int_1^2\left(\int_1^2 \frac{v}{2u}\,du\right)dv = \int_1^2 \frac{1}{2u}\,du\cdot\int_1^2 v\,dv = \frac{3}{4}\ln 2.$$

Exempel 11.8. Betrakta $\iint_D x\,dxdy$ där D är parallellogrammen med hörn i $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$ och $D(4,4)$. Ett affint variabelbyte fås ur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\cdot u + \overrightarrow{AC}\cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix}\cdot u + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix}\cdot v = \begin{pmatrix} 1+u+2v \\ 1+2u+v \end{pmatrix},$$

där $0 \le u, v \le 1$. Följaktligen $x = 1+u+2v$ samt

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad\Rightarrow\quad |J(u,v)| = 3.$$

$$\iint\limits_D x\,dxdy = \iint\limits_E 3(1+u+2v)\,dudv = 3\int_0^1\left(\int_0^1 (1+u+2v)\,du\right)dv = 3\int_0^1 (\frac{3}{2}+2v)\,dv = \frac{15}{2}$$