*Kapitel 12*

# Trippelintegraler

Analogt med dubbelintegralen utgår man från trappfunktioner på ett axelparallellt rätblock $\Delta$ som utvidgas för en kontinuerlig funktion $f$ på ett kvadrerbart område $D \subset \mathbb{R}^3$ till **trippelintegralen**:

$$\iiint_\Delta \Phi(x,y,z)\,dxdydz := \sum_{i,j,k} c_{ijk}\cdot \text{Volymen}(\Delta_{ijk}) \quad \rightsquigarrow \quad \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

Viktiga **tillämpningar**:

$$V(D) = \iiint_D 1\,dxdydz = \text{ volymen av } D$$

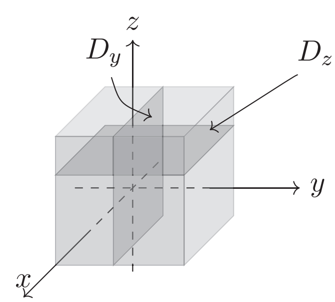
$$m(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz = \text{ massan av kroppen } D \text{ en med densitet } \rho(x,y,z)$$

**Variabelbyte:**

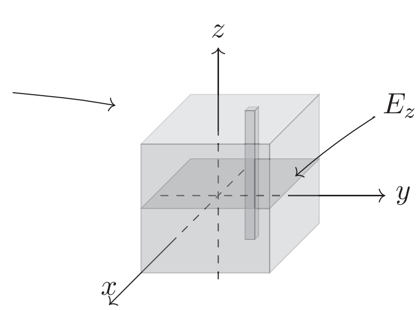
$$\iiint_D f(\boldsymbol{x})\,dxdydz = \iiint_E f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))\cdot\left|\frac{d(\boldsymbol{x})}{d(\boldsymbol{u})}\right| dudvdw$$

**Upprepad integration:** om $D$ är ett rätblock $D = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le a_2, b_1 \le y \le b_2, c_1 \le z \le c_2\}$ så gäller

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_{c_1}^{c_2}\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right)dz = \\ \text{(med “skivor”)} \quad &= \int_{b_1}^{b_2}\left(\iint_{D_y} f(x,y,z)\,dxdz\right)dy = \\ &= \int_{a_1}^{a_2}\left(\iint_{D_x} f(x,y,z)\,dydz\right)dx\end{aligned}$$



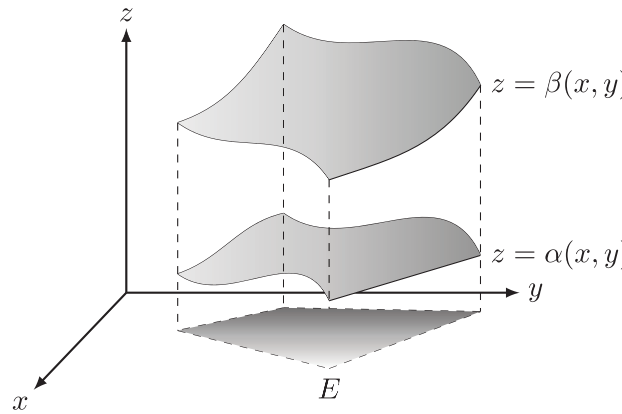

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \iint_{E_z}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy = \\ \text{(med “stavar”)} \quad &= \iint_{E_y}\left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right)dxdz = \\ &= \iint_{E_x}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dx\right)dydz\end{aligned}$$



Allmänt gäller följande formler:

- projektion på koordinataxel ($z$-axeln, **stavar**), t.ex. $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y), (x,y) \in E\}$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_E dxdy \int\limits_{z=\alpha(x,y)}^{z=\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

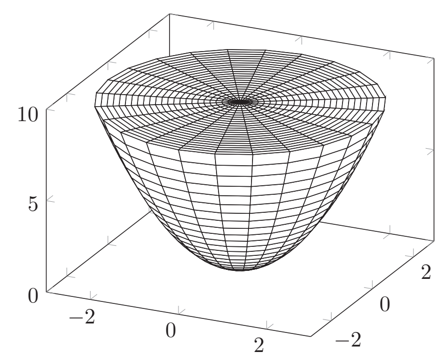



- projektion på koordinatplan ($xy$-planet, **skivor**),

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right) dz,$$

där $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in D\}$ och $[a,b]$ är projektion av $D$ på $z$-axeln.

**Exempel 12.1** (**Trippelintegral**). Betrakta $\iiint_D z\,dxdydz$ över kroppen $D = \{x^2 + y^2 \le z \le 9\}$. Integration med stavar m.h.a. polära koordinater:



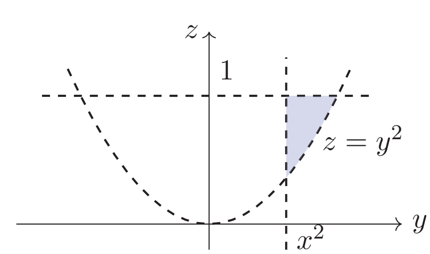

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 9} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=9} z\,dz\right) dxdy =$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 9} \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_{z=x^2+y^2}^{z=9} dxdy =$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 9} \tfrac{1}{2}\left(81 - (x^2+y^2)^2\right) dxdy =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=3} (81 - r^4) r\,dr\right) d\varphi = \pi \left[\tfrac{81}{2}r^2 - \tfrac{1}{6}r^6\right]_0^3 = 243\pi$$

Integration med skivor:

$$\iiint_D z\,dxdydz = \int_{z=0}^{z=9} \left(\iint_{x^2+y^2\le z} z\,dxdy\right) dz = \int_{z=0}^{z=9} zdz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} r\,dr = 2\pi \int_{z=0}^{z=9} \frac{z^2}{2} dz = 243\pi$$

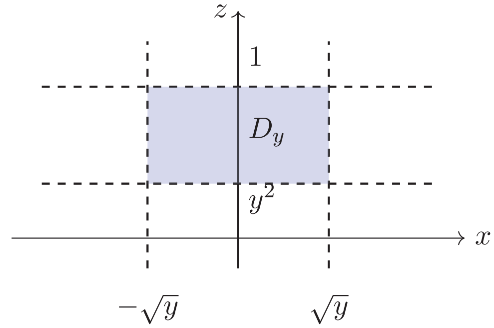
**Exempel 12.2** (**Volym**). Beräkna volymen av kroppen $D = \{x^2 \le y \le \sqrt{z} \le 1\}$. Först via skivor på fixa $x$-nivåer: $-1 \le x \le 1$ och $D_x = \{x^2 \le y \le \sqrt{z} \le 1\} = \{x^2 \le y\} \cap \{y^2 \le z \le 1\}$

$$V = \iiint_D 1\,dxdydz = \int_{-1}^1 dx \iint_{D_x} 1\,dydz = \int_{-1}^1 dx \int_{y=x^2}^{y=1} dy \int_{z=y^2}^{z=1} dz =$$
$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (1-y^2)dy = \int_{-1}^1 \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} - x^2 + \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{16}{21}.$$



Nu integrerar vi via skivor på fixa $y$-nivåer: för ett fixt $y \in$ får vi $0 \leq y \leq 1$ och

$$V = \iiint_D 1\,dxdydz = \int_0^1 \left( \iint_{D_y} 1\,dxdz \right) dy =$$
$$= \int_0^1 \text{Arean}(D_y)\,dy = \int_0^1 2\sqrt{y} \cdot (1 - y^2)\,dy$$
$$= 2\left[ \frac{2}{3} y^{2/3} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^1 = \frac{16}{21}$$




**Exempel 12.3 (Variabelbyte).** Beräkna $\iiint_D y^2 dxdydz$ över $D : 4x^2 + 4xy + 10y^2 \leq x + y - z \leq 1$.

*Lösning.* Kvadratkomplettering ger $(2x + y)^2 + (3y)^2 \leq x + y - z \leq 1$. Betrakta ett linjärt byte:

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3y \\ w = x + y - z \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| = \frac{1}{6}.$$

Så ser vi också att variabelbytet är bijektivt. Det nya området blir $E = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq w \leq 1\}$, se Exempel 12.1 ovan. Följaktligen,

$$\iiint_D y^2 dxdydz = \iiint_E \frac{1}{6}\left(\frac{v}{3}\right)^2 dxdydz = \int_0^1 dw \iint_{u^2+v^2 \leq w} \frac{v^2}{54}\,dudv =$$

(planpolära koordinater)

$$= \int_0^1 dw \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{w}} \rho \cdot \frac{\rho^2 \cos^2\varphi}{54}\,dr = \frac{\pi}{27 \cdot 4} \int_0^1 w^2\,dw = \frac{\pi}{324}$$

**Exempel 12.4 (Rymdpolärt byte).** Beräkna

$$\iiint_D x^2 z\,dxdydz$$

där $D$ ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ och $0 \leq x \leq y$.

*Lösning.* Mängden $D$ är en åttondels 'glass-strut'; olikheterna kan i tur och ordning översättas till

$$E = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6, \\ \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Rymdpolärt byte

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad \frac{d(x,y,z)}{d(\rho,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

och ny mängd $E$ med gränser enligt ovan. Vi får

$$\iiint_E x^2 z\,dxdydz = \iiint_D (r\cos\varphi\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot \,drd\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/6} \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi - 2}{384}.$$