Ytterligare area- och volymberäkningar

13.1. Volym- och areaberäkningar

Exempel 13.1 (Areaberäkning)**.** Betsäm arean av ellipsskivan $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Lösning. Betrakta linjärt byte till enhetscirkelskiva:

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}, \quad \text{och} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = ab$$

alltså:

$$\text{Arean}(D) = \iint_D dxdy = \iint_E ab\, dudv = ab \cdot \text{Arean}(E) = \pi ab$$

Exempel 13.2 (Volymberäkning)**.** Bestäm volymen av kroppen D som begränsas av paraboloiden $4z = x^2+2y^2$ och planet $z = y + 4$.

Lösning. Integrerar via stavar i z-led. Vi bestämmer först projektionen av D på xy-planet: skärningen av paraboloid med planet blir en ellipsskiva

$$\begin{cases} 4z = x^2 + 2y^2 \\ \ \ z = y + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 4y + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

vilket visar att integrationsområdet D ligger över ellipsskivan $E = \{x^2 + 2(y-1)^2 \leq 18\}$ mellan överfunktionen $\beta(x,y) = y + 4$ och underfunktionen $\alpha(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{4}$, alltså

$$\text{Vol}(D) = \iint\limits_E (y + 4 - \frac{x^2+2y^2}{4})\, dxdy$$

Ett linjärt variabelbyte ger en cirkelskiva

$$\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{2}(y-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E' := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 18\}, \qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

och integranden blir

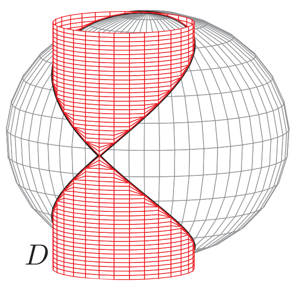
$$y+4-\frac{x^2+2y^2}{4}=\frac{4y+16-x^2-2y^2}{4}=\frac{18-u^2-v^2}{4}$$

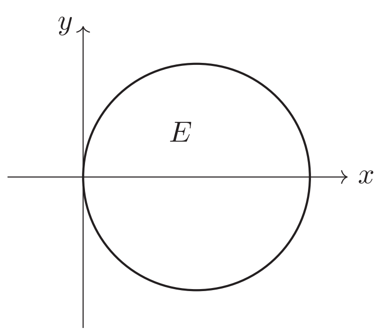
vilket ger m.h.a. polära koordinater

$$\mathrm{Vol}(D)=\iint\limits_{u^2+v^2\le 18}\frac{18-u^2-v^2}{4\sqrt{2}}\,dudv=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3\sqrt{2}}\frac{18-\rho^2}{4\sqrt{2}}\cdot\rho\,d\rho=\sqrt{2}\pi\left[\frac{9\rho^2}{4}-\frac{\rho^4}{16}\right]_0^{3\sqrt{2}}=\frac{81\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exempel 13.3. I ett klot med radie 1 borras ett cylindriskt hål med radie 1/2 så att klotet blir $x^2+y^2+z^2\le 1$ och cylindern $(x-1/2)^2+y^2\le 1/4$. Beräkna den bortborrade delens D volym.

Lösning.





Integrerar via stavar i z-led. Projektionen av D på xy-planet är cirkelskiva $E=\{(x-1/2)^2+y^2\le 1/4\}$. Överfunktionen och underfunktionen är respektive:

$$\beta(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\ \text{och}\ \alpha(x,y)=-\sqrt{1-x^2-y^2},$$

alltså

$$\mathrm{Vol}(D)=\iint\limits_E 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

Planpolära koordinater:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases},\quad \rho\le\cos\theta,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$$

alltså $E=\{(x-1/2)^2+y^2\le 1/4\}$ blir

$$\rho^2-\rho\cos\varphi=0\quad\Rightarrow\quad\rho=\cos\varphi,\ -\tfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\tfrac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{Vol}(D)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\left|\begin{array}{c}t=1-\rho^2\\ dt=-2\rho d\rho\\ \rho=\cos\varphi\to t=\sin^2\varphi,\\ \rho=0\to t=1,\end{array}\right|=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left[-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^{\sin^2\varphi}=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\varphi|^3)d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi^3)d\varphi=\frac{4}{3}\left[\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi+\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$$

13.2. Masscentrum

Låt D vara en kropp i $\mathbb{R}^3$ med variabel densitet $\rho(x,y,z)$. Kroppens **masscentrum** (**tyngdpunkt**) $\boldsymbol{x}_D$ definieras som den punkt kring vilken kroppen är i momentjämnvikt med avseende på varje tänkt tyngdkraft, oavsett dess riktning. Tyngdpunkten för kroppen D beräknas med hjälp av trippelintegraler

$$\begin{cases}x_T=\frac{1}{m(D)}\iiint_D x\rho(x,y,z)\,dxdydz,\\ y_T=\frac{1}{m(D)}\iiint_D y\rho(x,y,z)\,dxdydz,\\ z_T=\frac{1}{m(D)}\iiint_D z\rho(x,y,z)\,dxdydz,\end{cases}\qquad \text{där}\quad m(D)=\iiint_D\rho(x,y,z)\,dxdydz\quad\text{är massan av kroppen } D$$

Exempel 13.4. Bestäm tyngdpunktens läge för kroppen $D : \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Vi antar att kroppen är gjord av ett homogent material.

Lösning. Observera att kroppen D är den åttonde del av enhetsklotet som ligger i den första oktanten. Låt ρ vara kroppens densitet: $\rho = konst$. Då får vi för massan:

$$m(D) \iiint_D \rho \, dxdydz = \rho \iiint_D dxdydz = \rho \cdot \mathrm{Vol}(D) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho = \frac{\pi \rho}{6}.$$

Av symmetriskäl är $x_D = y_D = z_D$, så att det återstår att bestämma exempelvis x_D. Vi har

$$x_T = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x\rho \, dxdydz = \frac{6}{\pi} \iiint_D x \, dxdydz.$$

Integralen i högerledet kan beräknas med hjälp av rymdpolåra koordinater: vi har $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$, alltså

$$\iiint_D x \, dxdydz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \underbrace{r \sin\theta \cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta}_{jacobian} \, dr = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 \, dr$$

$$= 1 \cdot \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}$$

varav tygndpunktens läge är

$$\boldsymbol{x}_D = \left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{3}{8}\right).$$

13.3. Multipelintegraler

Beteckningar:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_D f(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}.$$

Ett viktigt partiellt fall:

$$\text{hypervolymen av } D = \mu(D) := \int_D 1 \, d\boldsymbol{x}.$$

Exempel 13.5. Bestäm hypervolymen av 4-dimensionella enhetsklotet.

Lösning. Kroppen ges av

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}$$

varav

$$\mu(D) = \iiiint_D 1 \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \iint_{E_1} dx_1 dx_2 \iint_{E_r} dx_3 dx_4,$$

där $E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ är enhetsskiva i x_1x_2-planet och E_r är cirkelsskivan av radien

$$r = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

i x_3x_4-planet. Vi har för den inre integralen:

$$\iint_{E_r} dx_3 dx_4 = \mathrm{Arean}(E_r) = \pi r^2 = \pi(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

varav

$$\mu(D) = \iint_{E_1} \pi(1 - x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2 = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho \, d\rho = 2\pi^2 \cdot (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{\pi^2}{2}$$