Generaliserade dubbel- och trippelintegraler

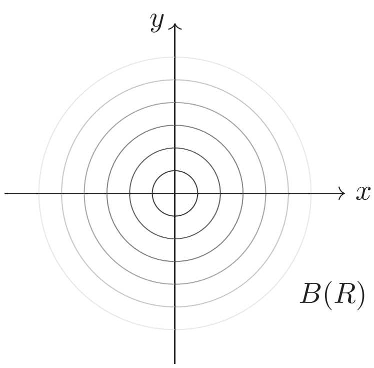
14.1. Inledande exempel

Vi har hittils definierat multipelintegraler av en *begränsad* funktion $f(\boldsymbol{x})$ över ett *begränsat* område i $\boldsymbol{x}$-rummet $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$. Vi påminner att **enkelintegralen** $\int_a^b f(x)\,dx$ är generaliserad om

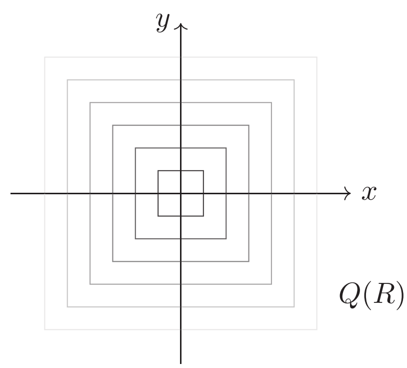
- antigen integranden $f(x)$ är obegränsad på i integrationsintervallet (a, b),
- eller integrationsintervallet (a, b) är obegränsad.

I både fallen definierar man motsvarande generaliserade integreler genom att med hjälp av ett gränsvärde successivt "fylla ut" (tömma ut) integrationsintervallet. För generaliserade multipelintegraler finns det oändligt många valmöjligheter att både avskära eventuella singulariteter och tömma ut ett integrationsområde.

Exempel 14.1. Betrakta $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$. Integranden är begränsad (≤ 1) men integrationsområde ($\mathbb{R}^2$) är obegränsad.



Uttömning med cirkelskivor



Uttömning med kvadrater

Som det första alternativet betraktar vi uttömning m.h.a. cirkelskivor $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$\iint\limits_{B(R)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = (\text{i polära koordinater}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \pi \cdot (1 - e^{-\rho^2}),$$

vilket medför att

$$\lim_{R\to\infty} \iint\limits_{B(R)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \pi.$$

Alternativt, kan vi tömma ut $\mathbb{R}^2$ är m.h.a. en kvadratisk *svit*: $Q(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} < R\}$ (se figuren ovan):

$$\iint_{Q(R)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \text{(itererad integration)} = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right)^2 \to (\sqrt{\pi})^2 = \pi, \quad \text{då } R \to \infty$$

Alltså ger både sätt det samma värde på den generaliserade integralen.

Allmänt, vi säger att slutna kvadrerbara mängder

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots D$$

är en **uttömmande svit** till D om för varje sluten kvadrerbar delmängd $D' \subset D$ gäller det att $D' \subset D_k$ för något k. Vi vill definiera generaliserad integral i två variabler i analogi med envariabelfallet via en uttömmande svit:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy := \lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy.$$

Men detta gränsvärde kan bero av hur vi väljer att fylla ut D med $\{D_k\}_{1\le k\le\infty}$.

Exempel 14.2. Varnande exempel från boken: Persson-Böiers: ex. 19 s. 272:

$$\iint_D xy(2-xy)e^{-xy}, \qquad D = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < 1\}.$$

Eftersom $f(x,y) := xy(2-xy)e^{-xy} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy}) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy})$,

$$\underbrace{\int_0^\infty f(x,y)\,dx}_{\text{generaliserad enkelintegral}} = \left[x^2ye^{-xy}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x^2ye^{-xy} = 0$$

så att en upprepad integration ger

$$\int_0^1 dy \int_0^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^1 0\,dy = 0.$$

Å andra sidan, om vi först integrerar m.a.p. y ger det:

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^\infty [xy^2e^{-xy}]_{y=0}^{y=1}\,dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1 \neq 0.$$

Alltså

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 f(x,y)\,dy \neq \int_0^1 dy \int_0^\infty f(x,y)\,dx.$$

Definition 14.1. Antag att för en funktion f och en mängd D gäller att gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy = A$$

existerar (ändligt!) och är oberoende av vilken uttömmande svit $\{D_k\}_{1\le k\le\infty}$ till D man väljer. Vi säger då att den **generaliserade inegralen**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

är **konvergent** med värdet A. En generaliserad inegral kallas i stället **divergent** om gränsvärde saknas eller om olika sviter ger olika värden.

14.2. Positiv integrand

Nu antar vi att $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett öppet område och $f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion i D med

$$f(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in D.$$

Vi tillåter även att både D och f vara obegränsad.

Sats 23. *Om $f(x,y) \geq 0$ i D då generaliserade integralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent om och endast om det finns en konstant $M > 0$ sådan att för varje kvadrerbar delmängd $D' \subset D$ gäller det att*

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy \leq M.$$

Den **geometriska tolkningen**: volymen mellan D och grafen av f är ändlig.

I praktiken, kan man normalt använda följande sats: *Antag att den inre enkelintegralen (t.ex. med avseende på y) är konvergent för varje fixt x. Då är dubbelintegralen av f konvergent om och endast om den yttre enkelintegralen m.a.p. x är konvergent.*

Exempel 14.3. Avgör om integralen $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$, där D ges av $x > 0, y > 0$, konvergerar och bestäm i så fall värdet.

Lösning. Integralen är generaliserad genom att integrationsområdet är obegrnsat. Integranden är positiv. Låt $D' \subset D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett godtyckligt begränsat område, d.v.s. det finns $R > 0$ så att $D \subset B(R)$, cirkelskivan av radien R. Med hjälp av monotonicitetsprincipen:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy &\leq \iint\limits_{B(R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = (\text{polära koordinater}) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \pi\Big(1 - \frac{1}{(1+R^2)}\Big) < \pi =: M,\end{aligned}$$

integralen är alltså konvergent.

För att beräkna värdet använder vi uttömning med kvartscirkelskivor: $K(R) = \{x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy &= \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{K(R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy = (\text{polära koordinater}) = \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\Big(1 - \frac{1}{(1+R^2)}\Big) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Sats 24 (Jämförelsekriterium)**.** *Låt $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$, $(x,y) \in D$. Då*

$$\iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy \quad \text{är konvergent} \quad \Rightarrow \quad \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \quad \text{är konvergent},$$

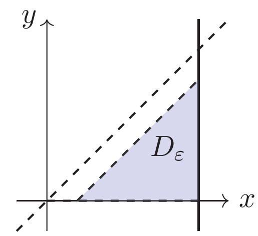
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy \quad \text{är divergent} \quad \Rightarrow \quad \iint\limits_{D} g(x,y)\,dxdy \quad \text{är divergent}$$

Exempel 14.4. Integralen $\iint_D e^{-2x^2-10y^2}\,dxdy$ är konvergent (varför?)

Det är också tillåtet att byta variabler i en generaliserad integral (med positiv integrand) och på så sätt överföra undersökningen till ett annat koordinatsystem, där räkningarna eventuellt är lättare att genomföra.

Exempel 14.5. Undersök konvergensen av $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ där $D = \{(x, y) : 0 \leq y < x \leq 1\}$.

Lösning. Integralen är generaliserad eftersom integranden växer obegrnsat vid begränsningslinjen $y = x$. Integranden är positiv. Låt $D_\epsilon = \{\epsilon \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \varepsilon\}$



$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, dxdy = \int_\varepsilon^1 dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x-y}}\, dy = \int_\varepsilon^1 \left[-2\sqrt{x-y}\right]_0^{x-\varepsilon} dx =$$

$$= 2\int_\varepsilon^1 (\sqrt{x} - \sqrt{\varepsilon})\, dx = 2\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - x\sqrt{\varepsilon}\right]_\epsilon^1 = \tfrac{4}{3} - 2\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2}.$$

Det visar att integralen är konvergent med värde $\frac{4}{3}$.

14.3. Integrand med växlande tecken

Om integranden växlar tecken så blir situationen mer komplicerad Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett öppet område och $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion i D med växlande tecken. Definierar

$$f^+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då} f(x,y) \geq 0 \\ 0 & \text{då} f(x,y) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & \text{då} f(x,y) \leq 0 \\ 0 & \text{då} f(x,y) > 0 \end{cases},$$

så att

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

$$\boxed{\iint_D f^+(x,y)\, dxdy \quad \text{och} \quad \iint_D f^-(x,y)\, dxdy \text{ är konvergenta} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_D |f(x,y)|\, dxdy \text{ är konvergent.}}$$

Definition. En generaliserad integral $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ är **absolutkonvergent** om $\iint_D |f(x, y)|\, dxdy$ är konvergent.

Sats 25. *$\iint_D f(x, y)\, dxdy$ är konvergent $\Leftrightarrow$ $\iint_D |f(x, y)|\, dxdy$ är konvergent.*

Vi demostrerar metoden med en trippelintegral.

Exempel 14.6. Låt D ges av $x^2 + y^2 < z^2$, $0 < z < 2\pi$. Avgör om integralen $\iiint_D \frac{\sin z}{z^2}\, dxdydz$ är konvergent.

Lösning. Integralen skiftar tecken i området. Vi har

$$\left|\frac{\sin z}{z^2}\right| \leq \frac{1}{z^2} \quad \text{i} \quad D.$$

Singularitet ligger i konens spets $(0, 0, 0)$. Med en ϵ-avskärning $D_\epsilon = \{x^2 + y^2 < z^2, \varepsilon < z < 2\pi\}$ får vi trippelintegralen

$$\iiint_{D_\epsilon} \frac{1}{z^2}\, dxdydz = \int_\varepsilon^{2\pi} dz \iint_{E_z} \frac{1}{z^2} dxdy = \int_\varepsilon^{2\pi} \frac{1}{z^2} \cdot \text{Arean}(E_z)\, dz = \int_\varepsilon^{2\pi} \pi\, dz < 2\pi^2$$

alltså absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent.