

Flervariabelanalys

Antekningar till föreläsningar

V. G. TKACHEV, LINKÖPING UNIVERSITY, SWEDEN

E-mail address: vladimir.tkatjev@liu.se

Innehåll

Kapitel 1. Mängder i \mathbb{R}^n . Funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p	1
§1.1. Euklidiska rummet \mathbb{R}^n : geometri	1
§1.2. Viktiga delmängder till \mathbb{R}^n	2
§1.3. Topologi i \mathbb{R}^n : öppna och slutna mängder	3
§1.4. Funktioner av flera variabler	4
§1.5. Reellvärda funktioner och dessa nivå-mängder	5
§1.6. Sammansatta funktioner	6
§1.7. Planpolära koordinater i \mathbb{R}^2	6
§1.8. Rymdpolära koordinater i \mathbb{R}^3	6
Kapitel 2. Gränsvärden	7
§2.1. Gränsvärden: inledande exempel	7
§2.2. Gränsvärde: definition och egenskaper	8
§2.3. Kontinuerliga funktioner	9
§2.4. Satser om kontinuerliga funktioner	10
Kapitel 3. Partiella derivator. Differentierbarhet	13
§3.1. Kort sammanfattning av derivatabegreppet för $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$	13
§3.2. Partiella derivator	13
§3.3. Differentierbarhet	15
§3.4. Partiella derivator av högre ordning	16
Kapitel 4. Kedjeregeln	17
§4.1. Diverse inledande exempel	17
§4.2. Den allmänna kedjeregeln och PDE	19
Kapitel 5. Kurvor, ytor. Gradient	21
§5.1. Kurvor och ytor	21
§5.2. Riktningderivata	24

Kapitel 6. Lokala undersökningar	25
§6.1. Lokala extrempunkter: nödvändiga villkor	25
§6.2. Taylors formel	26
§6.3. Lokala extrempunkter: tillräckliga villkor	27
Kapitel 7. Implicit givna funktioner	29
§7.1. Inledande exempel	29
§7.2. Implicit givna funktioner	30
§7.3. Implicita funktionssatsen för system	31
Kapitel 8. Optimering	33
§8.1. Optimering på kompakta mängder	33
§8.2. Optimering på ickekompakta mängder	34
§8.3. Ytterligare läsning: <i>Hur kan man fånga ett lejon i Saharaöknen?</i>	36
Kapitel 9. Optimering med bivillkor	37
§9.1. Optimering med bivillkor	37
§9.2. Optimering med två bivillkor	39
§9.3. Optimering med godtyckliga bivillkor	40
Kapitel 10. Dubbelintegraler	43
§10.1. Dubbelintegraler över rektangel	43
§10.2. Integration över godtyckliga områden	45
Kapitel 11. Funktionalmatriser. Variabelbyte i integraler	47
§11.1. Funktionalmatriser. Funktionaldeterminanter	47
§11.2. Kedjeregeln. Inversfunktion. Areaskalan	48
§11.3. Riemannsummor. Variabelbyte i dubbelintegraler	49
Kapitel 12. Trippelintegraler	51
Kapitel 13. Ytterligare area- och volymberäkningar	55
§13.1. Volym- och areaberäkningar	55
§13.2. Masscentrum	56
§13.3. Multipelintegraler	57
Kapitel 14. Generaliserade dubbel- och trippelintegraler	59
§14.1. Inledande exempel	59
§14.2. Positiv integrand	61
§14.3. Integrand med växlande tecken	62

Mängder i \mathbb{R}^n .

Funktioner från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p

1.1. Euklidiska rummet \mathbb{R}^n : geometri

- Som vanligt betecknar vi med \mathbb{R}^n mängden av alla reella n -tuplar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ med origo (nollvektorn) $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- Vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} är **parallella**, $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, om det finns ett reellt λ så att $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ eller $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$
- \mathbb{R}^n blir ett Euklidiskt rum om vi definierar en **skalärprodukt**:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

- **längden** eller **beloppet** av en vektor \mathbf{x} är $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$
- **Avståndet** mellan två punkter \mathbf{x} och \mathbf{y} är:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

- CAUCHY-SCHWARZ' OLIKHET: för godtyckliga vektorer i \mathbb{R}^n gäller:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|. \quad (1.1)$$

- TRIANGELOLIKHETEN: I \mathbb{R}^n gäller:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \quad (1.2)$$

- **Vinkeln** mellan två vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} är:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$$

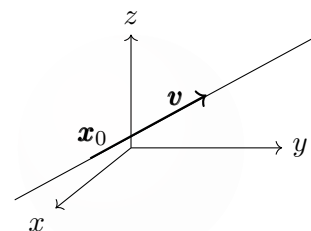
Obs. att (1.2) $\Rightarrow |\cos \theta| \leq 1$, alltså är vinkeln θ väl definierad.

- Vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} kallas **ortogonala** om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

1.2. Viktiga delmängder till \mathbb{R}^n

- En **linje** i \mathbb{R}^3 genom punkten $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ med *riktningsvektor* $\mathbf{v} = (a, b, c)$ på parameterform ges av

$$(x, y, z) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R}$$

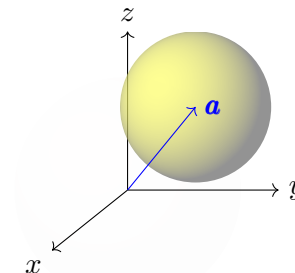


- Ett **öppet klot** i \mathbb{R}^n är mängd som kan skrivas

$$B(\mathbf{a}; r) = B_{\mathbf{a}}(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

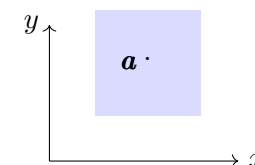
Vi kallar \mathbf{a} klotets *medelpunkt* eller *centrum* och r klotets *radie*.

- I \mathbb{R}^1 resp. \mathbb{R}^2 ger det *intervallet* $a - r < x < a + r$ resp *cirkelskivan* $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r$.
- En *sfär* i \mathbb{R}^n är mängden av punkter $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r\}$



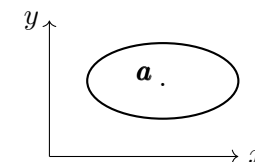
- En **öppen kvadrat** i \mathbb{R}^2 med sidan $2b$ och medelpunkten $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ är mängd av punkter som uppfyller

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < b$$



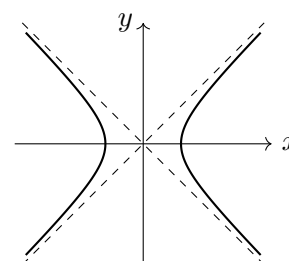
- En **ellips** i \mathbb{R}^2 med medelpunkten \mathbf{a} och halvaxellängderna a resp. b ges av ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



- En **hyperbola** i \mathbb{R}^2 med medelpunkten i origo ges av ekvationen

$$x^2 - y^2 = c, \quad c \neq 0$$



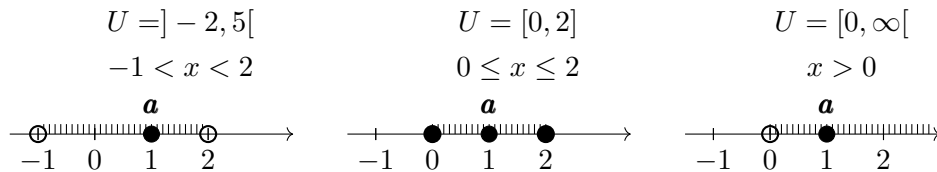
1.3. Topologi i \mathbb{R}^n : öppna och slutna mängder

Vi behöver ge uttrycken “ligga i närheten” och “omgivningen” “konvergera” en rigorös mening för att senare definiera begreppen gränsvärde och derivata.

Idé: $x \approx a$ är ekvivalent att säga att (avståndet, beloppet) $|x - a|$ är ‘litet’.

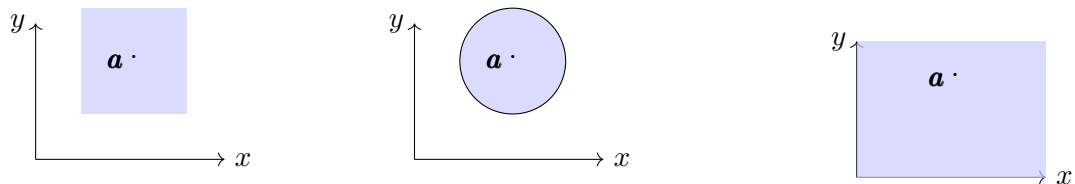
Definition 1.1. Mängden $U \subset \mathbb{R}^n$ är en **omgivning** till punkten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i \mathbf{a} .

Exempel 1.1. Olika omgivningar till punkten $x = 1$ i \mathbb{R}^1 i form av resp. mängdbeskrivning, olikhet och bild:



Exempel 1.2. Olika omgivningar till punkten $\mathbf{a} = (2, 2)$ i \mathbb{R}^2 :

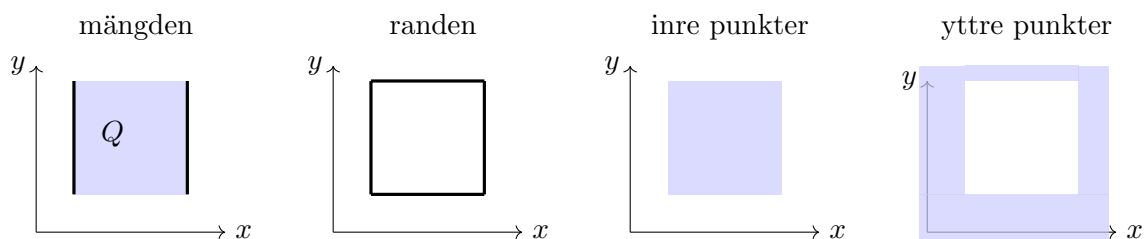
en kvadrat $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, 1 < y < 3\}$	en sluten cirkelskiva $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$	den första kvadranten $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$
--	---	---



Definition 1.2. Låt M vara en mängd i \mathbb{R}^n . En punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kallas

- **inre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} som ligger helt i M ;
- **yttre punkt** till M om det finns ett öppet klot kring \mathbf{a} som ligger i komplementet $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ till M ;
- **randpunkt** till M om *varje* öppet klot innehåller punkter från såväl M som M^c

Exempel 1.3. Betrakta $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 2\}$, se bilden.

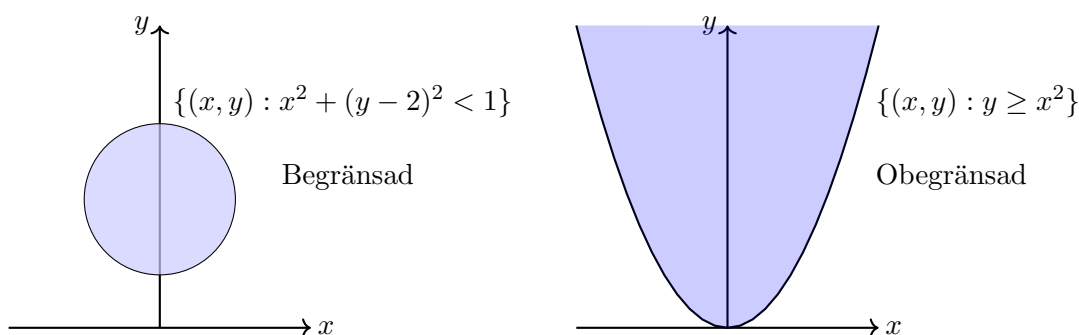


Definition 1.3. En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **öppen** om alla dess punkter är inre punkter. Den kallas **sluten** om alla dess randpunkter tillhör M .

Mängden Q i Exempel 1.3 är varken öppen eller sluten. Här kommer ytterligare exempel:

Slutna mängder i \mathbb{R}^2 :	Slutna mängder i \mathbb{R}^2 :
<ul style="list-style-type: none"> • en godtycklig linje • en sluten cirkelskiva (kvadrat) • hela planet • tomma mängden \emptyset 	<ul style="list-style-type: none"> • den första kvadranten $\{x > 0, y > 0\}$ • en öppen cirkelskiva (kvadrat) • hela planet • tomma mängden \emptyset

Definition 1.4. Mängden $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **begränsad** om det finns ett tal C sådant att $|x| \leq C$ för alla $x \in M$.



Definition 1.5. Mängden $M \subset \mathbb{R}^n$ kallas **kompakt** om den är både sluten och begränsad.

Exempel 1.4. Den slutna cirkelskivan ovan är kompakt, medan parabeln är inte.

1.4. Funktioner av flera variabler

Tänk på linjär algebra: en linjär avbildning är en map från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p ges av p linjära sammankopplade funktioner.

Viktiga speciella fall:

- $n = 2, p = 1$: **reellvärda funktioner** av tvåvariabler, t. ex. $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $n = 3, p = 1$: reellvärda funktioner av tre variabler, t. ex. $f(x, y, z) = xyz$
- $n \geq 2, p = 1$: reellvärda funktioner av flera variabler, t. ex. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$
- $n = 1, p = 2$: **kurvor** i \mathbb{R}^2 , t. ex. $f(t) = (\cos t, \sin t)$ (tänk på t som *tiden*)
- $n = 1, p = 3$: **kurvor** i \mathbb{R}^3 , t. ex. $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$

- $n = 1, p = 3$: **ytor** i \mathbb{R}^3 , t. ex.
$$\begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{pmatrix}$$

- $n = 2, p = 2$: **avbildningar**, t. ex.
$$\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

1.5. Reellvärda funktioner och dessa nivå mängder

- För en reellvärd funktion $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, av två variabler x och y definierar vi

$$\text{graf av } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Grafen av en funktion av två variabler kan betraktas som en **yta** i \mathbb{R}^3 som ges parametriskt av

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

- En **nivåkurva** för en funktion av två variabler $f(x, y)$ är mängden i xy -planet

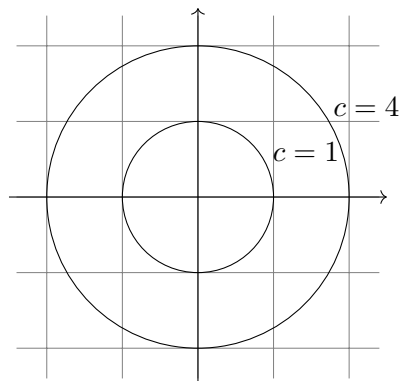
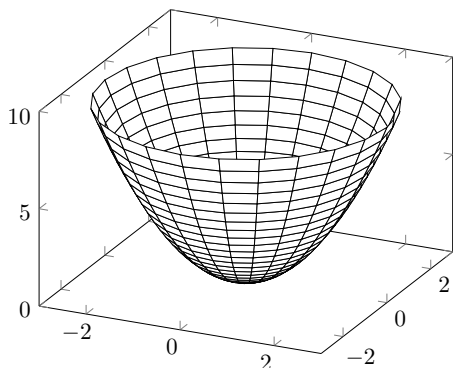
$$f(x, y) = c, \quad \text{där } c \text{ är ett godtyckligt reellt tal.}$$

Likadant, en **nivåyta** för en funktion av tre variabler $f(x, y, z)$ är mängden i xyz -rummet $f(x, y, z) = c$.

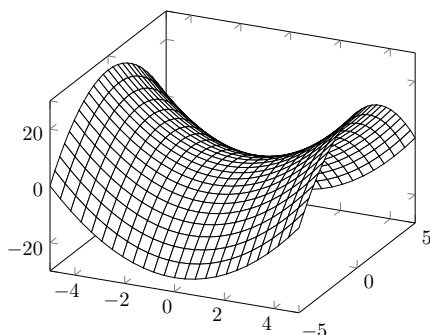
- En viktig praktisk fråga: hur funktionsytan kan tänkas se ut dels med ledning av nivåkurvorna?

Exempel 1.5. Observera att grafen av funktion av en variabel $f(x) = x^2$ är samtidigt 0-nivå mängd av funktion $g(x, y) = x - y^2$ av två variabler. Alternativt, den är också 1-nivå mängd av funktionen $h(x, y) = \frac{y^2}{x}$.

Exempel 1.6. Bertakta $f(x, y) = x^2 + y^2$. Grafen till f är en (elliptisk) paraboloid. Nivåkurvor är cirklar: $x^2 + y^2 = c$ av radien $r = \sqrt{c}$ med centrum i origo:



Exempel 1.7. Bertakta $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$. Nivåtor $f = c$ är familjen av parallella (hyperboliska) paraboloider som ges i \mathbb{R}^3 av en graf av funktionen $z = x^2 - y^2 - c$, $c \in \mathbb{R}$. Se nivåytan $f = 0$:



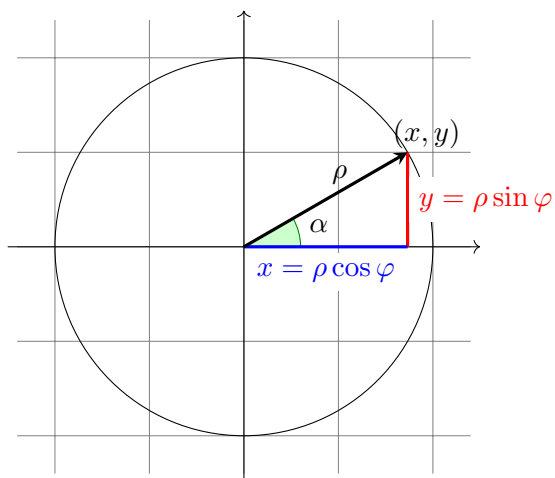
1.6. Sammansatta funktioner

Exempel 1.8. Kan $f(x, y)$ skrivas med hjälp av en funktion $g = g(t)$ av en variable enligt nedan?

a) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy} = g\left(\frac{x}{y}\right)$. **Svar:** ja, $\frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t + \frac{1}{t}$, där $t = \frac{x}{y}$, alltså $g(t) = t + \frac{1}{t}$.

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy} = g\left(\frac{x}{y}\right)$. **Svar:** nej, ty t.ex. $(x, y) = (1, 1)$ och $(2, 2)$ ger samma $t = 1$ men olika f (1 resp. $\frac{1}{2}$).

1.7. Planpolära koordinater i \mathbb{R}^2



Variabelbytte

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

definierar en bijektiv avbildning av området

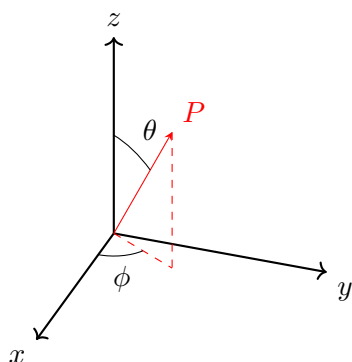
$$\begin{cases} \rho > 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

på området $(x, y) \neq (0, 0)$ i xy -planet \mathbb{R}^2

Obs!

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

1.8. Rympolära koordinater i \mathbb{R}^3



Variabelbytte

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

definierar en bijektiv avbildning av området

$$\begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

på området (x, y, z) utan z -axeln i xyz -rummet \mathbb{R}^3

Obs!

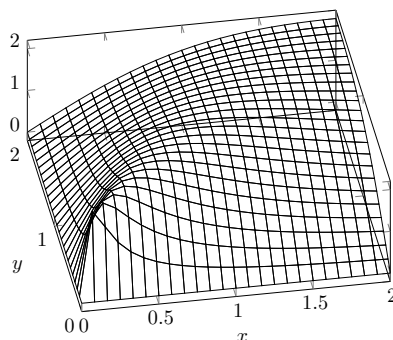
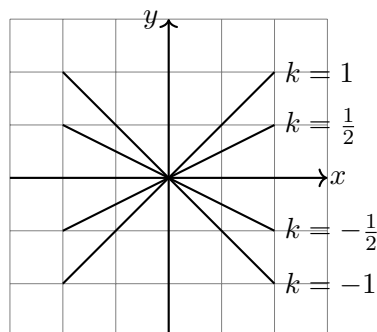
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Gränsvärden

2.1. Gränsvärden: inledande exempel

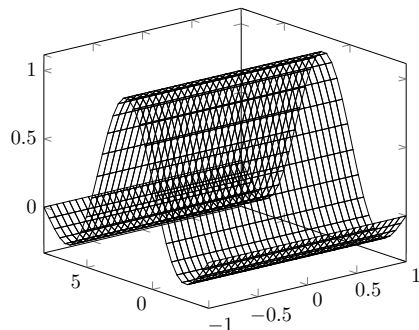
Exempel 2.1. Tänk på att du behöver skissa utseendet för t.ex. funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Definitionsmängden av f är $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$. Eftersom funktionen f saknar värde i origo, behöver vi studera vad som händer med funktionsvärdet då punkten $\mathbf{x} = (x, y)$ går mot $\mathbf{0}$. För att skissa grafen till f i omgivning av origo studerar vi olika linjer som går genom origo:

$$y = kx \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = f(x, kx) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$



Detta visar bland annat att linjerna $y = kx$, $x \neq 0$, är *nivåkurvor* till f ! Om man närmar sig origo längs linjerna $y = kx$ närmar sig funktionens värden $\frac{k}{1+k^2}$, vilket visar att (funktionens) gränsvärde är olika för olika värde på k . Med andra ord saknar funktionen f gränsvärde i origo.

Exempel 2.2. Undersök funktionen $f(x, y) = \frac{\sin(x-y)}{x-y}$. Då $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{linjen } y = x\}$. Grafen till f är



Exempel 2.3. Undersök funktionen $f(x, y) = \frac{x^2y}{(x^2+y)^2}$.

2.2. Gränsvärde: definition och egenskaper

Definition 2.1. Låt f vara en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p med definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$ och antag att \mathbf{a} är en *inre punkt eller en randpunkt* till D . Vi säger då att f har **gränsvärdet** $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ i punkten \mathbf{a} om det till varje tal $\epsilon > 0$ finns det ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x - \mathbf{a}| < \delta \text{ och } x \in D \quad \text{medför att} \quad |f(x) - \mathbf{b}| < \epsilon$$

Vi skriver detta som

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = \mathbf{b}$$

alternativt

$$f \rightarrow \mathbf{b} \quad \text{då} \quad x \rightarrow \mathbf{a}$$

Exempel 2.4. Betrakta \mathbb{R}^2 och $f(x, y) = 10y$. Visa att $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y) = 30$. Tips: testa med $\delta = \epsilon/10$.

Definition 2.2. Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$. Antag att $D \cap B(R)^c \neq \emptyset$ för alla $R > 0$ (med andra ord att D avlängs sig långt bort från origo). Vi säger att

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \mathbf{b}$$

om det till varje tal $\epsilon > 0$ finns det $R > 0$ sådant att

$$|x| > R \text{ och } x \in D \quad \text{medför att} \quad |f(x) - \mathbf{b}| < \epsilon$$

- **Obs!** att $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x)$ inte är definierat om \mathbf{a} är en *isolerad punkt* i D_f
- **Reellvärda funktioner av två variabler:** särskilda beteckningar

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

och gränsvärde i oändligheten:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} f(x, y)$$

- **Vektorvärda \Rightarrow reellvärda funktioner.** Det räcker med att studera komponenter: om $f = (f_1, \dots, f_p)$ och $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)$ så gäller det att

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f_j(x) = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

- **Sammansättningsregel.** Antag att $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^p$, och $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}^q$. Då ges den sammansatta funktionen $g \circ f$ av

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in D.$$

Om $f \rightarrow \mathbf{b}$ då $x \rightarrow \mathbf{a}$ och $g \rightarrow \mathbf{c}$ då $y \rightarrow \mathbf{b}$ så gäller **sammansättningsregel:** $g \circ f \rightarrow \mathbf{c}$ då $x \rightarrow \mathbf{a}$.

Exempel 2.5. Undersök $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\tan xy}$.

- **Summa.** Antag att f och g ähar samma definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ och $f \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g \rightarrow \mathbb{R}^p$. Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} g(x)$$

- **Produkt och kvot.** Antag att f och g är reellvärda funktioner med samma definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}).$$

Om $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0$ då gäller att

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})}.$$

- **Instängningsregeln.** Antag att reellvärda funktioner f och h har samma gränsvärde i punkten \mathbf{a} och att det också gäller att $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i D . Då existerar gränsvärdet $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ och är lika med det gemensamma gränsvärdet av f och h .

- **Instängningsregeln för absolutbeloppet.** Om $|f(x)| \leq g(x)$ i D och $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ då existerar gränsvärdet $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ och $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$.

Bevis. Tänk så här: om vi blir tilldelade ett litet $\epsilon > 0$ då existerar $\delta > 0$ så att

$$|g(\mathbf{x}) - 0| < \epsilon \text{ om } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

vilket medför att $|f(\mathbf{x})| < g(\mathbf{x}) = |g(\mathbf{x})| < \epsilon$, V.S.B. □

- **Negativt test.** För att visa att ett gränsvärde i en punkt \mathbf{a} inte existerar så räcker det med att det finns två vägar som gör att gränsvärdet får olika värden.

Exempel 2.6. Betrakta funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ och $\mathbf{a} = (0, 0)$.

- **Gränsvärde i origo:** (beteckning)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x, y), \quad \text{där } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ är den polära radien.}$$

Exempel 2.7. Undersök $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

Lösning. I polära koordinater:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi}{\rho^2} \right| \leq \rho^2 \cdot 1 \cdot 1 = \rho^2 \rightarrow 0 \quad \text{då } \rho \rightarrow 0.$$

Det kallar vi en φ -oberoende uppskattning. Med hjälp av instängningsregeln för absolutbeloppet (med $g(x, y) = \rho^2 = x^2 + y^2$) följer att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

2.3. Kontinuerliga funktioner

Det bästa fallet är när värde sammanfaller med gränsvärde.

Definition 2.3. Låt \mathbf{f} vara en funktion från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^p med definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}^n$. Vi säger att \mathbf{f} är **kontinuerlig** i punkten $\mathbf{a} \in D$ om gränsvärde $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existerar och

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

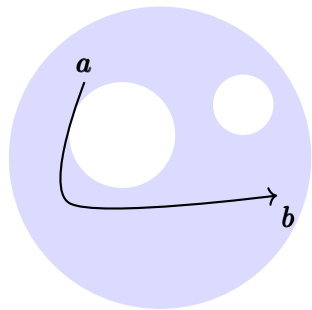
Om f är definierad i en punkt $\mathbf{a} \in D_f$ med ej kontinuerlig i \mathbf{a} då sägs den ha en diskontinuitet i \mathbf{a} . Om en funktion är kontinuerlig i varje punkt i dess definitionsmängd så sägs den vara **kontinuerlig**.

Alla **polynom i flera variabler**, t. ex. $x^2 - 2xyz - z^3$ är kontinuerliga funktioner (*varför?*)

2.4. Sats om kontinuerliga funktioner

Sats 1 (Satsen om största och minsta värde). Om f är en reellvärd kontinuerlig funktion med **kompakt** definitionsmängd D så har f såväl ett största som ett minsta värde på D .

En mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara **bågvis sammanhängande** om det till varje par \mathbf{a}, \mathbf{b} av punkter i D finns en kontinuerlig kurva $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ sådan att $\mathbf{x}(t) \in D$ för alla t och $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.



Sats 2 (Satsen om mellanliggande värden). Låt f vara en reellvärd kontinuerlig funktion med bågvis sammanhängande definitionsmängd D . Om f i D antar två värden $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$ så antar f också alla värden mellan $f(\mathbf{a})$ och $f(\mathbf{b})$.

Exempel 2.8.

a) Funktionen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ är inte kontinuerlig i origo eftersom den saknar värde i $(0, 0)$.

b) Funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

är inte kontinuerlig i origo eftersom den saknar gränsvärde i $(0, 0)$.

c) Funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

är kontinuerlig i origo enligt Exempel 2.7.

Exempel 2.9. Undersök $f(x, y) = \frac{x^2+x^2y^2+y^2}{x^2+y^2}$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Lösning. Med hjälp av φ -oberoende uppskattning:

$$|f(x, y) - 1| = \left| \frac{\rho^2 + \rho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{\rho^2} - 1 \right| = |\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi| \leq \rho^2 \rightarrow 0 \quad \text{då } r \rightarrow 0.$$

så att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Gör så här: om du har nämnare som

$$ax^2 + by^2 \quad \text{resp.} \quad ax^2 + by^2 + cz^2$$

då hjälper ofta generaliserade (eller modifierade) polära (resp. rymddpolära) koordinater:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{a}}\rho \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{b}}\rho \sin \varphi \end{cases} \quad \text{resp} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{a}}r \cos \varphi \sin \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{b}}r \sin \varphi \sin \theta \\ z = \frac{1}{\sqrt{c}}r \cos \theta \end{cases}$$

Exempel 2.10. Bestäm om möjligt $f(0,0)$ så att $f(x,y) = \frac{x^3 - yx^2}{x^2 + 4y^2}$ blir kontinuerlig i $(0,0)$

Lösning. Vanliga polära koordinater ger ingen effekt eftersom

$$x^2 + 4y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi \neq \rho^2.$$

Istället anpassar vi variabelbyte (de så kallade generaliserade polära koordinater)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{4}} \rho \sin \varphi \end{cases}$$

så följer det att

$$x^2 + 4y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2,$$

alltså

$$\left| \frac{x^3 - yx^2}{x^2 + 4y^2} \right| = \left| \frac{\rho^3 (\cos^3 \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi)}{\rho^2} \right| = |\rho (\cos^3 \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi)| \leq \rho \cdot 2 \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \rho \rightarrow 0.$$

Exempel 2.11. Kan man definiera $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + 2y + 1}$ i undantagspunkten så att f blir kontinuerlig där?

Lösning. Undantagspunkt \Leftrightarrow nämnare = 0 ger

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + (y + 1)^2 = 0,$$

alltså $(x,y) = (0,-1)$. Med hjälp av polära koordinater (med punkten $(0,-1)$ som polen),

$$\begin{cases} x = 0 + \rho \cos \varphi \\ y = -1 + \rho \sin \varphi \end{cases}$$

så får vi

$$\left| \frac{x^3 y}{x^2 + (y + 1)^2} \right| = \left| \frac{\rho^3 (-1 + \rho \sin \varphi)}{\rho^2} \right| \leq \rho(1 + \rho) \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad \rho \rightarrow 0.$$

d.v.s. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} f(x,y) = 0$. Alltså blir den *utvidgade* funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + 2y + 1} & \text{om } (x,y) \neq (0,-1) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

kontinuerlig.

Pariella derivator. Differentierbarhet

3.1. Kort sammanfattning av derivatabegreppet för $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$

Huvudidén är att imitera definition av derivata i envariabelfallet. En funktion $y = f(x)$ av en variabel är kallas *deriverbar* om f är definierad i någon omgivning av a och gränsvärdet

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} =: f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = Df(a). \quad (3.1)$$

exiterar. Gränsvärdet kallas då *derivatan* av f i a och betecknas $f'(a)$.

Geometrisk tolkning:

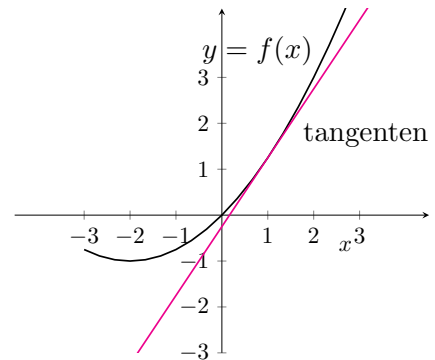
Existensen av $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$ betyder att

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \omega(x) \cdot (x - a)$$

där $\omega(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow a$, vilket även innebär att linjen

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

tangerar grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.



3.2. Partiella derivator

Definition 3.1. Antag att $f(x, y)$ är definierad i en omgivning av punkten (a, b) . Om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

existerar så säger vi att f är **partiellt deriverbar** med avseende på x i (a, b) . Gränsvärdet kallas den **partiella derivatan** av f med avseende på x i punkten (a, b) och betecknas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_x(a, b) = D_x f(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

På motsvarande sätt definierar vi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

I den allmänna fallet med en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ av n variabler:

$$f'_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

där $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ är vektorn med 1 på plats i .

Om alla partiella derivatorna $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ existerar för $i = 1, \dots, n$ säges f vara **partiellt deriverbar** i punkten \mathbf{a} .

Viktigt!

Man får använda beteckningen utan index för en funktion av en variabel, t.ex. $f'(x)$. Däremot partiella derivator är alltid med index, d.v.s. att skriva $f'(x, y)$ är ett fel.

Exempel 3.1.

- Om $f(x, y, z) = x^2 \ln y + yz$ då $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln y$. Likadant, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + z$ och $\frac{\partial f}{\partial z} = y$
- För $f(x, y) = g(xy)$ (obs. att $g = g(t)$ är funktion av en variabel t , d.v.s. f är en sammansatt funktion):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(xy)y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(xy)x$$

vilket betyder att $f(x, y) = g(xy)$ är en lösning till *differentialekvationen*

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exempel 3.2. Om $f = f(x, y)$ och $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ så behöver $f(x, y)$ inte vara en konstant. T.ex. $\frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 0$, eller $\frac{\partial(e^y \sin y)}{\partial x} = 0$. Allmänt, om $D_f = \mathbb{R}^2$ och $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ för alla (x, y) så är $x \rightarrow f(x, y)$ en konstant funktion av x för varje y , d.v.s.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y) = g(y) \text{ för en godtycklig deriverbar funktion } g \text{ av en variabel } y.$$

Exempel 3.3. Samma gäller för tre variabler:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = g(y, z).$$

Exempel 3.4. Lös systemet för $u = u(x, y, z)$

$$\begin{cases} u'_x = yz^2, \\ u'_y = xz^2 + 2y + z, \\ u'_z = 2xyz + y + 2e^{2z} \end{cases}$$

Lösning. Vi integrerar den första ekvationen (m.a.p. x):

$$u(x, y, z) = \int yz^2 dx = xyz^2 + g(y, z),$$

där $g(y, z)$ är en godtycklig ('direverbar') som **inte** beror av x . Insättning i den andra ekvationen ger

$$u'_y = xz^2 + g'_y(y, z) = xz^2 + 2y + z \Rightarrow g'_y(y, z) = 2y + z \Rightarrow g(y, z) = y^2 + yz + h(z),$$

alltså $u = xyz^2 + y^2 + yz + h(z)$. Insättning i den tredje ekvationen ger att

$$u'_z = (xyz^2 + y^2 + yz + h(z))'_z = 2xyz + y + 2e^{2z} \Rightarrow h'(z) = 2e^{2z} \Rightarrow h(z) = e^{2z} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

alltså

$$u = xyz^2 + y^2 + yz + h(z) = xyz^2 + y^2 + yz + e^{2z} + C.$$

Exempel 3.5. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vi vet att f inte är kontinuerlig i origo. Däremot, $f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$ och samma gäller för $f'_y(0, 0) = 0$.

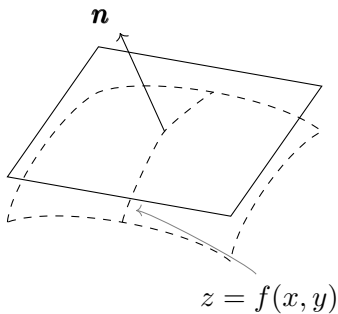
Med detta exempel ser vi att

att vara **partiellt deriverbar** $\not\Rightarrow$ att vara **kontinuerlig!**

3.3. Differentierbarhet

Definition 3.2. Låt (a, b) vara en inre punkt i definitionsmängd D till en funktion $f(x, y)$. Vi säger att f är **differentierbar i punkten** (a, b) om det finns konstanter A_1 och A_2 och en funktion $\omega(h, k)$ sådana att

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2} \omega(h, k), \quad \text{med} \quad \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \omega(h, k) = 0. \quad (3.2)$$



Planet med ekvationen

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

kallas för **tangentplan** till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$. Uttrycket

$$df(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k, \quad \text{där } h = dx, \quad k = dy$$

kallas för **differential** av f i punkten (a, b) .

Exempel 3.6 (Differentierbarhet). För $f(x, y) = xy$ och $(a, b) = (1, 2)$ gäller att

$$f(1+h, 2+k) - f(1, 2) = (1+h)(2+k) - 2 = h + 2k + hk = \underset{\downarrow}{1} \cdot h + \underset{\downarrow}{2} \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}} \omega(h, k)$$

där $\omega(h, k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0$ då $\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0$ (testa gärna med polära koordinater!)

Exempel 3.7 (Felanalys). Uppskatta $f(2, 1; 0, 95)$ då $f(x, y) = x/y^2$, via differentialen.

Lösning. Partiella derivatorna är $f'_x = \frac{1}{y^2}$ och $f'_y = -\frac{2x}{y^3}$, alltså $f'_x(2, 1) = 1$ och $f'_y(2, 1) = -4$, alltså

$$\begin{aligned} f(2, 1; 0, 95) - f(2, 1) &\approx df(2, 1) = f'_x(2, 1) \cdot (2, 1 - 2) + f'_y(2, 1) \cdot (0, 95 - 1) = \\ &= 0, 1 + 4 \cdot 0, 05 = 0, 3 \\ &\Rightarrow f(2, 1; 0, 95) \approx 2 + 0, 3 = 2, 3. \end{aligned}$$

I det allmänna fallet har vi följande definition.

Definition 3.3. Låt \mathbf{a} vara en inre punkt i definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$ till en funktion $f(\mathbf{x})$. Vi säger att f är **differentierbar i punkten** (\mathbf{a} om det finns konstanter A_i , $i = 1, \dots, n$ och en funktion $\omega(\mathbf{h})$ sådana att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |\mathbf{h}| \omega(\mathbf{h}), \quad \text{med} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \omega(\mathbf{h}) = 0. \quad (3.3)$$

Om f är differentierbar i varje punkt $\mathbf{a} \in D$ säger vi att f är differentierbar i D .

Sats 3. En differentierbar funktion är kontinuerlig.

Bevis. För två variabler följer detta direkt från (3.3) då $\mathbf{h} \rightarrow 0$. □

Sats 4. En differentierbar funktion f är partiellt direverbar med

$$f'_{x_j}(\mathbf{a}) = A_j$$

där A_1, \dots, A_n är talen i (3.2).

Bevis. Om vi väljer $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$ får vi då

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = A_k + \frac{|t\mathbf{e}_k|}{t} \omega(t\mathbf{e}_k) \Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t} = A_k. \quad \square$$

Exempel 3.8 (Tangentplan). Bestäm ekvationer för tangentplanen till ytan $z = x^2 - xy + 2$ i $M(1, 2, 1)$.

Lösning. Partiella derivatorna är $f'_x = 2x - y$ och $f'_y = -x$, alltså $f'_x(1, 2) = 0$ och $f'_y(1, 2) = -1$ och tangentplanevation är

$$z = 1 + 0 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 2) = 3 - y. \quad \square$$

Definition 3.4. Låt f vara definierad i en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ vi säger att f är av **klass** \mathcal{C}^1 , eller $f \in \mathcal{C}^1(D)$ om f är partiellt deriverbar och om alla de partiella derivatorna f'_1, \dots, f'_n är kontinuerliga i D . Vi säger att f är av **klass** \mathcal{C}^k om alla derivator till och med ordning k existerar och är kontinuerliga.

Sats 5. Varje funktion f av klassen \mathcal{C}^1 är differentierbar.

3.4. Partiella derivator av högre ordning

T.ex. andra ordningens derivator

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f''_{x_k x_j} = f''_{j k}$$

Sats 6. För varje funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ av klass \mathcal{C}^2 gäller att

$$f''_{x_k x_j} = f''_{x_j x_k}.$$

Kedjeregeln

4.1. Diverse inledande exempel

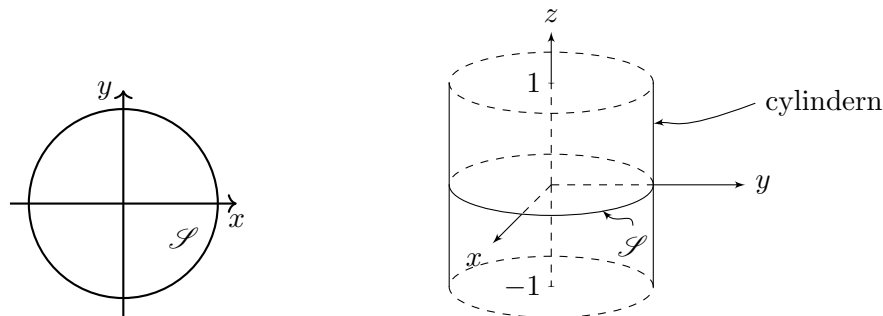
Exempel 4.1. Låt $f(t) = \sin t$ och $g(x, y) = x/y$ så att $F(x, y) := f \circ g(x, y) = \sin \frac{x}{y}$. Då får vi för partiella derivator

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Allmänt, om den sammansatta funktionen $F(x, y) := f(g(x, y))$ är väl definierad så

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

Exempel 4.2. Antag att $f(x, y) = x^2 - y^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ och $g(t) = (\cos t, \sin t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Låt \mathcal{S} vara kurvan given genom ekvationen på parameterform $(x, y) = g(t) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, alltså enhetscirkeln:



Den sammansatta funktionen $f \circ g(t)$ kan då tolkas som restriktion av f till enhetscirkel $\mathcal{S} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (restriktionen är det samma funktion f men vi minskar definitionsmängden till \mathcal{S} .) Detta problem förekommer ofta t.ex i optimeringen. Då får vi för derivata av $f \circ g(t)$:

$$f(g(t)) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f(g(t)) = -2 \sin 2t.$$

Alternativt kan vi beräkna derivatan med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{d}{dt} (x^2 - y^2) = 2xx'_t - 2yy'_t = -2 \cos t \sin t - 2 \sin t \cos t = -4 \sin t \cos t = -2 \sin 2t.$$

Sats 7. Antag att $f(x, y)$, $g_1(t)$ och $g_2(t)$ är differentierbara funktioner och den sammansatta funktionen $f(g_1(t), g_2(t))$ är definierad. Då är $f(g_1(t), g_2(t))$ deriverbar och **kedjeregeln** gäller

$$\frac{df(g_1(t), g_2(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t)) \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t)) \cdot g_2'(t)$$

Bevis (grund idé). Eftersom $g_1(t)$ och $g_2(t)$ är differentierbara funktioner i t_0 får vi

$$\begin{aligned} g_1(t_0 + h) &= g_1(t_0) + g_1'(t_0) \cdot h + h\omega_1(h) = a + a_1h + h\omega_1(h), \\ g_2(t_0 + h) &= g_2(t_0) + g_2'(t_0) \cdot h + h\omega_2(h) = b + b_1h + h\omega_2(h), \end{aligned}$$

där $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_2(h) = 0$ och $g_1(t_0) = a$, $g_2(t_0) = b$, $g_1'(t_0) = a_1$, $g_2'(t_0) = b_1$. Enligt differentierbarhet av f i punkten (a, b) :

$$f(a + k, b + l) - f(a, b) = A_1k + A_2l + \omega(k, l)\sqrt{k^2 + l^2}, \quad \lim_{(k, l) \rightarrow (0, 0)} \omega(k, l) = 0,$$

där $A_1 = f'_x(a, b)$, $A_2 = f'_y(a, b)$. Så får vi för den sammansatta funktionen $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$:

$$\begin{aligned} F(t_0 + h) - F(t_0) &= f(a + k, b + l) - f(a, b) = \\ &= f(a + a_1h + h\omega_1(h), b + b_1h + h\omega_2(h)) - f(a, b) = \\ &= A_1 \cdot (a_1h + h\omega_1(h)) + A_2 \cdot (b_1h + h\omega_2(h)) + h\Omega(h) \\ &= A_1a_1h + A_2b_1h + h\Omega_1(h) \end{aligned}$$

där $\lim_{h \rightarrow 0} \Omega_1(h) = 0$ (varför?). Alltså:

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = f'_x(g_1(t_0), g_2(t_0))g_1'(t_0) + f'_y(g_1(t_0), g_2(t_0))g_2'(t_0).$$

□

Exempel 4.3. Bestäm $f(t)$ så att $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ uppfyller

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad u(1, 2) = 5.$$

Lösning. Låt $\rho = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, då

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\rho) \cdot \rho'_x = f'(\rho) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot x,$$

och likadant $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot y$, alltså

$$\begin{aligned} 2f(\rho) &= x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot (x^2 + y^2) = f'(\rho)\rho \\ \Rightarrow \frac{f'(\rho)}{f(\rho)} &= \frac{2}{\rho} \Rightarrow \ln f(\rho) = 2 \ln \rho + C. \end{aligned}$$

Alltså är $f = C\rho^2$. Återgång till x och y ger följaktligen att $u(x, y) = C(x^2 + y^2)$. Eftersom

$$u(1, 2) = C \cdot (1^2 + 2^2) = 5C = 5$$

får vi $C = 1$. Problemet har alltså den entydiga lösningen

$$u(x, y) = x^2 + y^2.$$

4.2. Den allmänna kedjeregeln och PDE

Låt $\{f_k(t_1, \dots, t_q) : k = 1, \dots, n\}$ och $u(x_1, \dots, x_n)$ vara funktioner av klass \mathcal{C}^1 så är den sammansatta funktionen $u(f_1(t_1, \dots, t_q), \dots, f_n(t_1, \dots, t_q))$ av klass \mathcal{C}^1 och

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Alternativt kan detta skrivas som följande "minnesregel"

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

Exempel 4.4. Antag att $z(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ och lös

$$z'_x - 2z'_y = x + y \quad \text{med villkoret } z(x, 0) = 0$$

m.h.a. variablebyte $u = 2x + y$, $v = x$.

Lösning. Vi får för partiella derivatorna

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}, \end{aligned}$$

alltså **transformeras** den ursprungliga ekvationen till

$$\begin{aligned} z'_x - 2z'_y &= 2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} = \text{enligt antagande} = x + y = \text{efter variabelbyte} = u - v \\ \implies \frac{\partial z}{\partial v} &= u - v \implies z = \int (u - v) dv = uv - \frac{1}{2}v^2 + g(u) \end{aligned}$$

Återgång till x och y ger följaktligen att den **allmänna lösningen** är

$$z = (2x + y)x - \frac{1}{2}x^2 + g(2x + y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + g(2x + y),$$

där $g = g(t)$ fås ut genom insättning i villkoret:

$$z(x, 0) = \frac{3}{2}x^2 + 0 + g(2x + 0) = \frac{3}{2}x^2 + g(2x) = 0$$

vilket ger

$$g(2x) = -\frac{3}{2}x^2 \implies g(t) = -\frac{3}{2}(t/2)^2 = -\frac{3}{8}t^2.$$

Problemet har alltså den entydiga lösningen

$$z(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{3}{8}(2x + y)^2 = -\frac{1}{2}xy - \frac{3}{8}y^2.$$

Kontroll: $z(x, 0) = 0$ och $z'_x - 2z'_y = -\frac{1}{2}y - 2 \cdot (-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y) = x + y$,

Exempel 4.5. Transformera och lös

$$x^2 z''_{xx} + 2xy z''_{xy} + y^2 z''_{yy} = 0 \tag{4.1}$$

med hjälp av $u = x$, $v = y/x$ ($x > 0$) och bivillkoren $z(1, y) = 0$, $z'_x(1, y) = y^2$.

Lösning. Vi får för partiella derivatorna av första ordningen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = z'_u - \frac{y}{x^2} z'_v, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} z'_v, \end{aligned}$$

Samma användning av kedjeregeln upprepas nu på varje term i uttrycken för z'_x och z'_y . Vi ska ta hänsyn till att såväl z'_u som z'_v beror av både u och v , vilka i sin tur beror av x och y . Vi får till att börja med att

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(z'_u - \frac{y}{x^2} z'_v \right) = \frac{\partial}{\partial x} (z'_u) + \frac{2y}{x^3} z'_v - \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (z'_v).$$

De två andra ordningens derivatorna i HL fås med hjälp av kedjeregeln som:

$$\frac{\partial}{\partial x} (z'_u) = \frac{\partial}{\partial u} (z'_u) \cdot u'_x + \frac{\partial}{\partial v} (z'_u) \cdot v'_x = z''_{uu} \cdot 1 + z''_{vu} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = z''_{uu} - \frac{y}{x^2} z''_{uv}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (z'_v) = \frac{\partial}{\partial u} (z'_v) \cdot u'_x + \frac{\partial}{\partial v} (z'_v) \cdot v'_x = z''_{uv} - \frac{y}{x^2} z''_{vv}, \quad (4.3)$$

alltså

$$z''_{xx} = z''_{uu} - \frac{2y}{x^2} z''_{uv} + \frac{y^2}{x^4} z''_{vv} + \frac{2y}{x^3} z'_v.$$

Och vidare med hjälp av (4.3)

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} z'_v \right) = -\frac{1}{x^2} z'_v + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (z'_v) = -\frac{1}{x^2} z'_v + \frac{1}{x} (z''_{uv} - \frac{y}{x^2} z''_{vv}).$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} z'_v \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (z'_v) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} (z'_v)'_y = \frac{1}{x^2} z''_{vv}$$

Vi får alltså från (4.1) att $x^2 z''_{uu} = 0 \Rightarrow z''_{uv} = 0$. Successiv integration ger

$$z'_u = g(v) \Rightarrow z = ug(v) + h(v) \Rightarrow z = xg(y/x) + h(y/x).$$

Villkoret $z(1, y) = 0$ ger $g(y) + h(y) = 0$ alltså $h(y) = -g(y)$, vilket ger

$$z(x, y) = (x - 1)g(y/x).$$

Nu koncentrerar vi oss på $z'_x(1, y) = y^2$. Vi får

$$z'_x = g\left(\frac{y}{x}\right) - (x - 1)g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2},$$

alltså

$$z'_x(1, y) = g(y) = y^2 \Rightarrow z(x, y) = (x - 1)g(y/x) = (x - 1)\frac{y^2}{x^2}.$$

Den sökta lösningen är alltså $z(x, y) = (x - 1)\frac{y^2}{x^2}$. □

Kurvor, ytor. Gradient

5.1. Kurvor och ytor

En parameterkurva i \mathbb{R}^n ges av

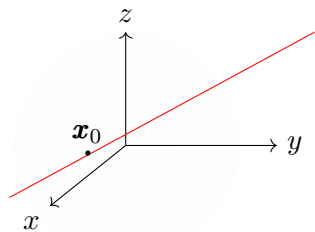
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Två kurvor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$ och $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$ är **ekvivalenta** om de kan identifieras genom ett **parameterbyte**, d.v.s. om det finns en bijektion $t = g(\tau) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sådan att $\mathbf{x}(g(\tau)) = \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$. Vektorn $\mathbf{x}'(t)$ kallas för **tangentvektorn** till $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ i punkten $\mathbf{x}(t)$. Linjen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{x}'(t_0)s, \quad s \in \mathbb{R}$$

kallas för **tangentlinjen** till $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ i punkten $\mathbf{x}(t)$.

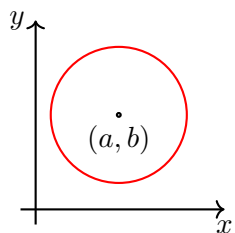
Exempel 5.1. Här kommer några exempel på *parametriserade kurvor*:



En **linje** i \mathbb{R}^3 genom punkten $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

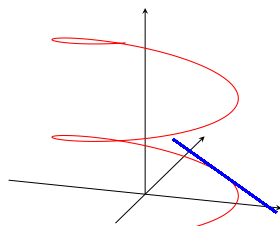
med riktningsvektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ på parameterform ges av:

$$(x, y, z) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), \quad t \in \mathbb{R}$$



en **cirkel** i planet av radien r med medelpunkt i (a, b) :

$$(x, y) = (a + r \cos t, b + r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi[$$

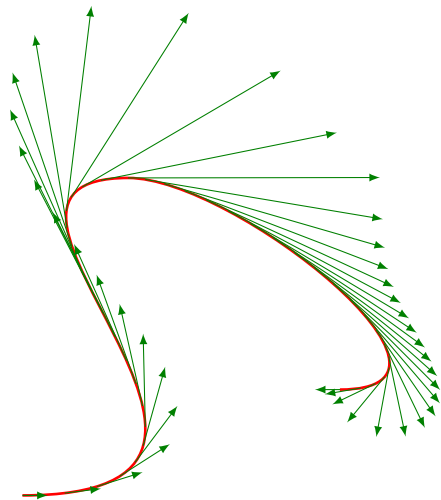


en **helix** i \mathbb{R}^3

$$(x, y, z) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0.5t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Tangentlinjen för $t = \pi/4$

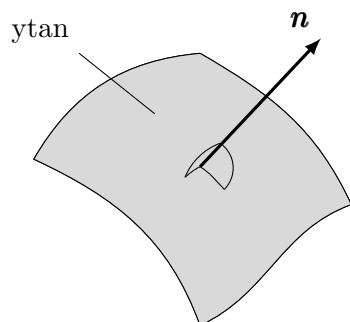
Geometrisk tolkning av tangentvektorn som hastighet:



Längden av en parameterkurva $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), t \in [\alpha, \beta]$

$$\text{längden av } \gamma = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{x}'(t)| dt.$$

En (parametriserad) yta ges av $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t), (s, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$.



Normalvektor i punkten $\mathbf{x}(s, t)$ ges av $\mathbf{n} = \mathbf{x}'_s \times \mathbf{x}'_t$

Normallinjen genom punkten $\mathbf{x}(s, t)$ ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t) + \mathbf{n}(s, t) \cdot r, r \in \mathbb{R}$$

Andra sätt att beskriva en yta i \mathbb{R}^3 :

- som en graf (parameterfri): $z = f(x, y)$
- som en nivå mängd: $f(x, y, z) = C$.

Definition 5.1. För en differentierbar funktion $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, definierar vi **gradienten** av f i punkten \mathbf{x} som vektorn:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Exempel 5.2. Bestäm normallinjen respektive tangentplanet till ytan $x^2yz = 2$ i punkten $(1, 1, 2)$.

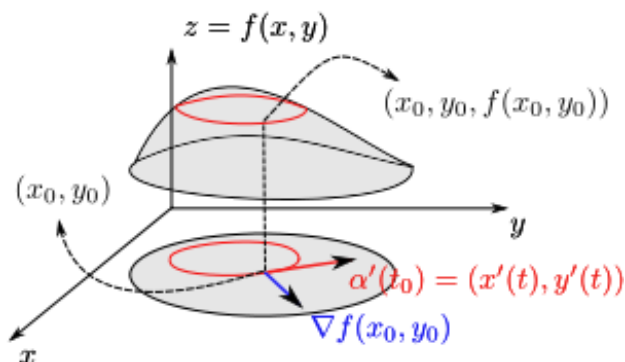
Låt $\gamma : \mathbf{x} = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ vara en parameterkurva och $f(x, y)$ en differentierbar funktion sådan att den sammansatta funktionen $f_{\gamma}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ är definierad. Då kan vi skriva **kedjeregeln** som **skalärprodukten**

$$\frac{df_{\gamma}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) \quad (5.1)$$

Observera att derivatan $\frac{df_\gamma}{dt}$ är hastighet hos funktionen $f_\gamma(t) = f(\mathbf{x}(t))$, d.v.s. hastigheten av f längs kurvan γ i repsektive punkt. Om $f = \text{konst}$ längs kurvan γ då gäller det att

$$\frac{df_\gamma}{dt} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}(t)) \perp \mathbf{x}'(t)$$

Gradientens geometriska betydelse: gradienten av f i en punkt $(x_0, y_0) \in D$ är ortogonal till nivåkurvan $f(x, y) = f(x_0, y_0)$:



Allmänt gäller det att gradienten av $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i en punkt \mathbf{x}_0 är ortogonal till nivåmängd $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Exempel 5.3. Bestäm tangentplan till ytan $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ i punkten $(2, 2, 3)$.

Lösning. Låt $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$. Då ytan är nivåmängden $F(x, y, z) = 1$. Vi har för gradienten:

$$\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-2x, -2y, 2z), \quad \nabla F(2, 2, 3) = (-4, -4, 6),$$

alltså är $\mathbf{n} = (2, 2, -3)$ en normal till tangentplanet i $(2, 2, 3)$. Det ger normalekvation

$$2x + 2y - 3z = C,$$

där C fås ut ur villkoret att punkten $(2, 2, 3)$ ligger i tangentplanet, d.v.s. $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = C = -1$.

Exempel 5.4. Bestäm det tangentplan till ytan $z = x^2 + y^2$ som är parallellt med planet $2x - 3y + 4z = 5$.

Lösning. (I) Planets normalvektor är $\mathbf{n} = (2, -3, 4)$. Tangentplanets ekvation i punkten $(a, b, a^2 + b^2)$ ges av

$$z - (a^2 + b^2) = z'_x(a, b)(x - a) + z'_y(a, b)(y - a) = 2a(x - a) + 2b(y - b) \Rightarrow 2ax + 2by - z = a^2 + b^2.$$

Alltså:

$$\frac{2a}{2} = \frac{2b}{-3} = \frac{-1}{4} \Rightarrow a = -1/4, b = 3/8$$

vilket ger tangentplanets ekvation (på normalform) $48y - 32x - 64z = 13$.

(II) **Alternativ lösning** m.h.a. gradient. Grafen $z = x^2 + y^2$ är 0-nivåmängd av en ny funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Då normalen $\mathbf{n} = (2, -3, 4)$ till $2x - 3y + 4z = 5$ ska vara parallell med gradienten $\nabla F(a, b, c)$ samt $F(a, b, c) = 0$ vilket ger

$$\nabla F(a, b, c) = (2a, 2b, -1) \parallel \mathbf{n} \Rightarrow (2a, 2b, -1) \times \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 0 \\ 8a + 2 = 0 \\ 8b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1/4, b = 3/8$$

5.2. Riktningderivata

Observera att (5.1) visar att derivatan $\frac{df_\gamma}{dt}$ beror enbart på gradienten av f och tangentvektorn till γ i resp. punkten.

Definition 5.2. Med derivatan av $f(\mathbf{x})$ i punkten \mathbf{a} med avseende på riktningen \mathbf{v} , $|\mathbf{v}| = 1$, menas gränsvärdet

$$f'_v(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \left. \frac{d}{dt}(f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})) \right|_{\text{för } t=0}$$

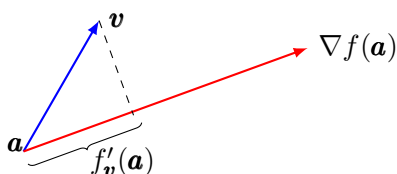
Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot v_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{f'_v(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.}$$

Observera att om $|\mathbf{v}| = 1$ då

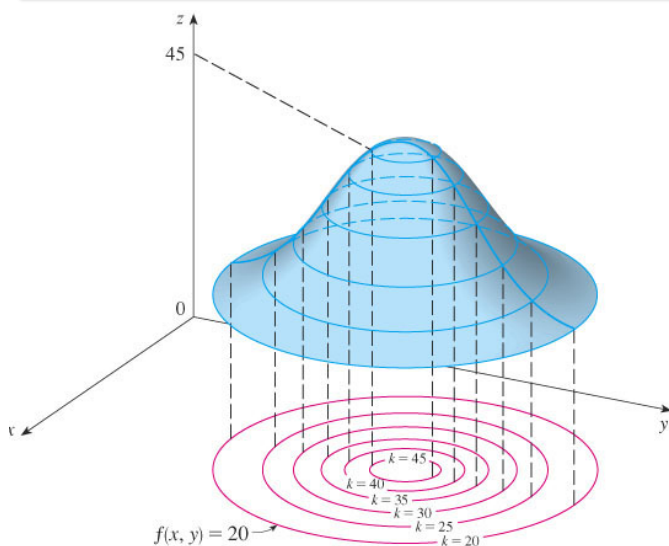
$$f'_v(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = |\nabla f(\mathbf{a})| \cdot \cos \alpha,$$

se bilden:



Sats 8. Gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i punkten \mathbf{a} , och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $|\nabla f(\mathbf{a})|$. Analogt, $-\nabla f(\mathbf{a})$ pekar i den riktning i vilken funktionen f avtar snabbast i punkten \mathbf{a} .

Lång gradient ∇f ger täta nivåkurvor, kort ger glesa.



Exempel 5.5. En bergsbestigare på berget $z = 20 - (x^4 + 2y^4)$ befinner sig i $(2, -1, 2)$ och går alltid i den riktning där berget är brantast. Beskriv vägen till toppen.

Lösning: $\nabla z = (-4x^3, -8y^3)$, alltså $\nabla z(2, -1) = (-32, 8) \sim (\text{parallell med}) \sim (-4, 1)$, alltså ska han gå i denna riktning.

Lokala undersökningar

6.1. Lokala extrempunkter: nödvändiga villkor

Definition 6.1. Låt $f = f(\mathbf{x})$ vara en funktion med definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}^n$. f sägs att ha ett **lokalt maximum** i en punkt $\mathbf{a} \in D$ om det finns $\delta > 0$ sådant att

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D \text{ och } |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta.$$

Punkten \mathbf{a} kallas en **lokal maximipunkt** för f och funktionsvärde $f(\mathbf{a})$ kallas ett **lokalt maximivärde**. Om dessutom $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ då $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ talar vi om en **sträng lokal maximipunkt** och ett **strängt lokalt maximivärde**. På motsvarande sätt definieras en **(sträng) lokal minimipunkt** och ett **(strängt) lokalt minimivärde**. Lokala maximi- och minimipunkter kallas för **lokala extrempunkter**.

Exempel 6.1. Undersök följande funktioner kring $(0, 0)$:

a) $f(x, y) = 1 + |x| + y^2 - y^4,$

b) $g(x, y) = 2 + (2x - y)^2 - xy.$

Lösning. a) Observera att f inte är differentierbar i origo (p.g.a. absolutbelopet). Vi kan studera hur f beter sig längs varje koordinataxel:

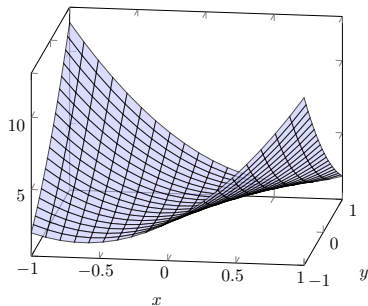
$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 1 + |x| \geq 1 = f(0, 0), & \text{för alla } x \\ f(0, y) &= 1 + y^2(1 - y^2) \geq 1 = f(0, 0) & \text{för } y \text{ sådana att } |y| < 1. \end{aligned}$$

Vi gissar att $(0, 0)$ är en minimipunkt. Det stämmer eftersom **för alla** punkter (x, y) "nära origo" gäller att

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) - 1 = |x| + y^2(1 - y^2) > 0 \quad \text{för } (x, y) \neq (0, 0) \text{ och } \max\{|x|, |y|\} < 1$$

d.v.s. $(0, 0)$ är sträng lokal minimipunkt.

b) Om vi undersöker den andra funktioner med samma metod så får vi



$$f(x, 0) = 2 + 4x^2 > 2 = f(0, 0), \text{ för alla } x \neq 0$$

$$f(0, y) = 2 + y^2 > 2 = f(0, 0) \text{ för alla } y \neq 0$$

däremot

$$f(x, 2x) = 2 - 2x^2 < 2 \text{ för alla } x \neq 0$$

Det betyder att $(0, 0)$ är ingen extrempunkt (en *saddelpunkt*)

En viktig observation: det räcker *inte* med att gå längs enstaka kurvor för att bevisa *existens* av lokala max/min, däremot det kan räcka för att *MOT*bevisa.

Sats 9. Om funktionen $f(x)$ har lokalt extremvärde i en **inre** punkt \mathbf{a} i definitionsmängden och om f är partiellt deriverbar i \mathbf{a} så är $f'_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$ för alla i . Med andra ord,

$$\mathbf{a} \text{ är en extrempunkt} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = 0.$$

Bevis. Låt $n = 2$ och låt (a, b) vara ett lokalt extrempunkt, säg ett lokalt maximum. Betrakta funktionen av en variabel $g : x \rightarrow f(x, b)$. Så gäller det att $g(x)$ har ett lokalt maximum i a , alltså $g'(a) = 0$. Således $f'_x(a, b) = g'(a) = 0$. Alltså $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. \square

Definition 6.2. En punkt $\mathbf{x} \in D_f$ i vilken gradient $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ kallas en **stationär** punkt.

$$\mathbf{a} \text{ är en extrempunkt} \Rightarrow \mathbf{a} \text{ är en stationär punkt.}$$

Exempel 6.2. Låt $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$. De stationära punkterna fås ur

$$\begin{cases} f'_x = 2x^2 - 2x + 4y = 0 \\ f'_y = -4y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow (0, 0) \text{ eller } (-1, -1)$$

De stationära punkterna är således $(0, 0)$ eller $(-1, -1)$.

6.2. Taylors formel

Om $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) så gäller det att

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \sqrt{h^2 + k^2}\omega(h, k) \\ &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\omega(\mathbf{h}) \quad \text{med} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow (0,0)} \omega(\mathbf{h}) = 0, \end{aligned}$$

Sats 10 (Taylorsutveckling). Låt $f(x, y) \in \mathcal{C}^3(D)$ i en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a, b) \in D$. Då är

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \text{Hess } f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^3),$$

där

$$\text{Hess } f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\mathbf{a}) & f''_{xy}(\mathbf{a}) \\ f''_{xy}(\mathbf{a}) & f''_{yy}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad \text{är Hessianen av } f \text{ i } \mathbf{a}$$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \underbrace{f'_x(\mathbf{a})h + f'_y(\mathbf{a})k}_{\text{approximationen av 1:a ordningen}} + \frac{1}{2} \underbrace{(f''_{xx}(\mathbf{a})h^2 + 2f''_{xy}(\mathbf{a})hk + f''_{yy}(\mathbf{a})k^2)}_{\text{approximationen av andra ordningen} = Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})} + \underbrace{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}} B(h, k)}_{\text{restterm}}$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Bevis. Idé: betrakta funktionen $F(t) = f(a + th, b + tk)$ av en variabel t , $0 \leq t \leq 1$ så att $F \in \mathcal{C}^3$ och således Maclaurins formel ger för $t = 1$:

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!} \cdot 1^2 + \frac{F'''(\theta)}{3!} \cdot 1^3$$

där $\theta \in]0, 1[$. Vi får $F(0) = f(a, b)$ och med hjälp av kedjeregeln:

$$F'(0) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$$

$$F''(0) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2$$

$$F'''(\theta) = \text{summa av termer } \frac{3!}{i!(3-i)!} f'''_{x^i y^{3-i}} h^i k^{3-i} \text{ som kan uppskattas med } B \cdot (h^2 + k^2)^{3/2}$$

□

Exempel 6.2 (forts.) Vi utvecklar $f = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$ kring $(0, 0)$. Partiella derivatorna i origo:

$$f'_x = 2x^2 - 2x + 4y \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0$$

$$f'_y = 4x - 4y \Rightarrow f'_y(0, 0) = 0$$

$$f'_{xx} = 4x - 2 \Rightarrow f'_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f'_{xy} = 4 \Rightarrow f'_{xy}(0, 0) = 4$$

$$f'_{yy} = -4 \Rightarrow f'_{yy}(0, 0) = -4,$$

alltså

$$\text{Hess } f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{(0,0)}(\mathbf{h}) = -2h^2 + 8hk - 4y^2$$

$$\text{Således } f(h, k) = \underbrace{-2h^2 + 8hk - 4y^2}_{\frac{1}{2}Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^3)$$

Exempel 6.3. Använd kända Maclaurinutvecklingar från envariabelanalysen för att bestämma Maclaurinutvecklingar av ordning 2 med rest i ordoform till

$$f(x, y) = \sin(x + y) \ln(1 + x - y).$$

Tips: använd polära koordinater för att uppskatta resterter. T.ex.

$$(x + y)^3 = \rho^3 \underbrace{(\cos \theta + \sin \theta)^3}_{\text{begränsad}} = O(\rho^3),$$

$$\sin(x + y) = x + y + O((x + y)^3) = x + y + O(\rho^3),$$

$$\ln(1 + x - y) = (x - y) + \frac{1}{2}(x - y)^2 + O((x - y)^3) = x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + O(\rho^3)$$

$$f(x, y) = (x + y + O(\rho^3)) \cdot (x - y + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + O(\rho^3)) = x^2 - y^2 + O(\rho^3).$$

Observera att alla tredje ordningens termer sådana som x^3, x^2y etc har formen $O(\rho^3)$. T.ex.

$$x^2y = \rho^3 \underbrace{\cos^2 \theta \sin \theta}_{\text{begränsad}} = O(\rho^3)$$

6.3. Lokala extrempunkter: tillräckliga villkor

Antag att (a, b) är en stationär punkt, d.v.s. $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0 \Rightarrow$ första ordningens termer i Taylorsutveckling kring en stationär punkt försvinner:

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) - f(a, b) &= \frac{1}{2}Q_{(a,b)}(h, k) + (h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}B(h, k) \approx \\ &\approx \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2) \end{aligned}$$

Sats 11. Låt f vara av klass \mathcal{C}^3 och (a, b) en stationär punkt till f . Så gäller det fyra följande alternativ:

- (1) $Q(h, k)$ är **positivt definit**, d.v.s. $Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0) \Rightarrow$ ett **strängt lokalt minimum** i (a, b) .
- (2) $Q(h, k)$ är **negativt definit**, d.v.s. $Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0) \Rightarrow$ ett **strängt lokalt maximum** i (a, b) .
- (3) $Q(h, k)$ är **indefinit**, d.v.s. $Q(h, k) > 0$ antar såväl positiva som negativa värden. Då är (a, b) ingen extrempunkt. Man talar i stället om en **sadelpunkt** i (a, b) .
- (4) $Q(h, k)$ är positivt (eller negativt) **semidefinit**, d.v.s. $Q(h, k) \geq 0$ (resp. $Q(h, k) \leq 0$) och $Q(h, k) = 0$ för något $(h, k) \neq (0, 0)$. I detta undantagsfall kan man inte använda Q för att dra slutsatser om karaktären av den stationära punkten (a, b) .

För $n \geq 3$ gäller motsvarande alternativen.

Exempel 6.2 (forts.) Vi undersöker $f = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$ $(0, 0)$. Vi har sett att

$$Q_{(0,0)}(h, k) = -2h^2 + 8hk - 4y^2 = -2(h - 2k)^2 + 4k^2,$$

alltså är $Q_{(0,0)}(h, k)$ en indefinit kvadratisk form. Alternativt kan $Q_{(0,0)}(h, k)$ undersökas m.h.a. **spektralteorin**:

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 4 \\ 4 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 - \sqrt{17} < 0 \\ \lambda_2 = -3 + \sqrt{17} > 0 \end{cases}$$

Exempel 6.4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(x, y, z) = 6xy + 6xz + 3y^2 - 3z^2 - x^3$$

Lösning. För att hitta stationära punkter sätter vi gradienten av f till noll:

$$\begin{cases} f'_x = -3x^2 + 6y + 6z = 0 \\ f'_y = 6x - 6y = 0 \\ f'_z = 6x - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \\ x^2 = 4x \end{cases}$$

Alltså har vi tvåstationära punkter: $A = (0, 0, 0)$ och $B = (4, 4, 4)$. Andraderivatorna är $f'_{xx} = -6x$, $f'_{yy} = f'_{zz} = -6$, $f'_{yz} = 0$ och $f'_{xy} = f'_{xz} = 6$ vilket ger de kvadratiske formerna

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}Q_A(h, k, l) &= -k^2 - l^2 + 2hk + 2hl = -(k^2 - 2hk + l^2 - 2hl) \\ &= -((k - h)^2 - h^2 + l^2 + 2hl) = -(k - h)^2 - (l - h)^2 + 2h^2 \end{aligned}$$

(indefinit ty positiv för $(h, k, l) = (1, 1, 1)$ och negativ för $(h, k, l) = (0, 1, 0)$, så origo är en **sadelpunkt**), och

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}Q_B(h, k, l) &= -4h^2 - k^2 - l^2 + 2hk + 2hl = -((k - h)^2 + 3h^2 + l^2 - 2hl) \\ &= -((k - h)^2 + (l - h)^2 + 2h^2) = -(k - h)^2 - (l - h)^2 - 2h^2 \end{aligned}$$

(**negativt definit**, så $f(4, 4, 4) = 128$ är ett **lokalt maximum**).

Se även Hans Lundmark diskussion på TATA69 här:

<http://courses.mai.liu.se/GU/TATA69/M/2014/TATA69-exempel-med-mera-ht2014.pdf>

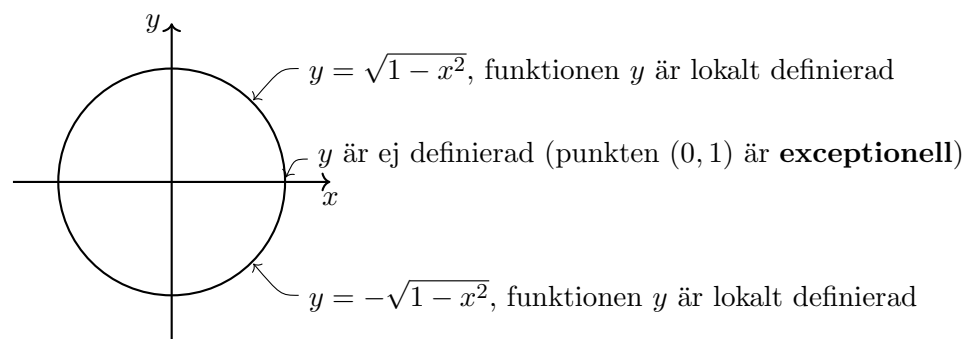
Implicit givna funktioner

7.1. Inledande exempel

Betrakta ekvationer med en och flera variabler:

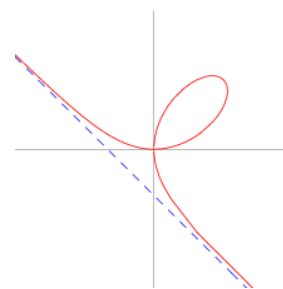
- $x^2 - 4x + 3 = 0$, en ekvation som kan lösas algebraiskt; lösningarna är $x_1 = 1$ och $x_2 = 3$.
- $x^5 - x + 3 = 0$, det finns fem komplexa rötter men det **finns ingen formel** som genom successiva rotutdragningar (radikaler) ger lösningen till ekvationen (*Abels sats*, Nils Henrik Abel 1824).
- $y = x^2 - 2e^x$, en ekvation som definierar y som en **explicit** funktion
- $yx = 2$, funktionen y ges **implicit**. Funktionen y i detta fall kan även ges explicit: $y = 2/x$.

Exempel 7.1. Ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ definierar y som en **implicit** funktion. Här y kan även lösas ut lokalt, se bilden:



Exempel 7.2 (Descartes *folium*). $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Med hjälp av substitutionen $y = tx$ kan ekvationen skrivas om som en parameterkurva:

$$x^3 + x^3 t^3 - 3x^2 t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3t}{1+t^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$



7.2. Implicit givna funktioner

Allmänt kommer vi undersöka implicit givna funktioner av två eller flera variabler. Istället för att studera frågan huruvida en kurva kan ses som en funktionsgraf eller ej, så kommer vi att studera **frågan**: är det så att det, givet en punkt på kurvan, finns en *omgivning* av denna punkt i vilken kurvan kan ses som grafen till en funktion?

Vi studerar därför en kurva i planet given av ekvationen

$$F(x, y) = C.$$

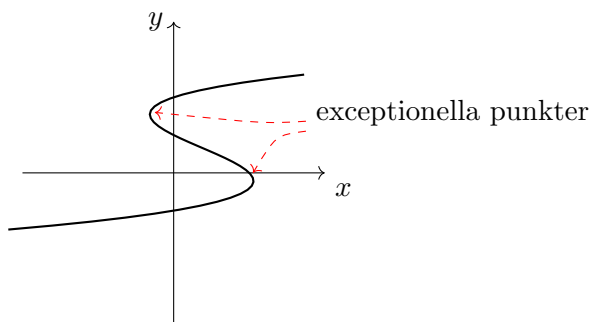
Noterar att vi kan tolka en sådan kurva som en *nivåkurva*.

Definition 7.1. Vi säger att ekvationen $F(x, y) = C$ **implicit definierar** en funktion $y = y(x)$.

Exempel 7.1 visar att vi kan hitta sådana omgivningar för varje punkt (a, b) på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ förutom två exceptionella punkter där tangentkurvor är lodrätta, med andra ord

$$\text{gradient i punkt } (a, b) \text{ pekar horisontellt} \Leftrightarrow F'_y(a, b) = 0 \Leftrightarrow \text{punkten } (a, b) \text{ är 'exceptionell'}$$

se bilden



För att kunna se kurvan som en graf $y = f(x)$ så behöver vi alltså bara undvika exceptionella punkter vilket motiverar

Sats 12 (Implicita funktionssatsen). Låt $F(x, y)$ vara en \mathcal{C}^1 -funktion och låt $F(a, b) = C$, d.v.s. punkten (a, b) hör nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om

$$F'_y(a, b) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (7.1)$$

Observera att sambandet (7.2) kan fås via kedjeregeln genom att derivera $F(x, f(x)) = C$:

$$\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

Denna metod kallas **implicitderivering**.

Exempel 7.3. Visa att ekvationen $y^5 = 4xy + 1$ lokalt kring $(0, 1)$ definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $y(x)$, och beräkna $y'(x)$ uttryckt i x och $y(x)$; ange speciellt $y(0)$ och $y'(0)$.

Lösning. Vi definierar $F(x, y) = V.L. - H.L. = y^5 - 4xy - 1$, alltså $F(0, 1) = 0$ och $y(0) = 1$. Implicitderivering ger

$$0 = \frac{d}{dx}(y^5 - 4xy - 1) = 5y^4y' - 4y - 4xy' \Rightarrow y' = \frac{4y}{5y^4 - 4x} \Rightarrow y'(0) = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 1^4 - 4 \cdot 0} = \frac{4}{5}$$

Alternativt, med hjälp av (7.2):

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{4y}{5y^4 - 4x}.$$

Det går att **generalisera** Implicita funktionssatsen till att hantera *nivåytor*

$$F(x, y, z) = C$$

i rummet. Om $F(a, b, c) = C$ och

$$F'_z(a, b, c) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b, c) i rummet sådan att restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en \mathcal{C}^1 -funktion $z = f(x, y)$ och

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (7.2)$$

Exempel 7.4. Betrakta ekvationen

$$2x + \exp(-y^2) \sin x = yz.$$

Låt $F(x, y, z) = 2x + \exp(-y^2) \sin x - yz$.

(i) Eftersom $|\cos x| \leq 1$, får vi

$$F'_x = 2 + \exp(-y^2) \cos x \geq 2 - \exp(-y^2) \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

alltså $F'_x(x, y, z) \neq 0$ för *alla* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vilket ger m.h.a. implicita funktionssatsen att $x = x(y, z)$ existerar lokalt kring varje punkt $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ som löser ekvationen $F(x, y, z) = 0$.

(ii) Antag att $(y, z) = (a, b)$ är en godtycklig punkt i planet. Vi undersöker ekvationen

$$g(x) := 2x + \exp(-a^2) \sin x - ab = 0$$

med avseende på x . Eftersom $g'(x) = F'_x(x, a, b) \geq 1 > 0$, funktionen $g(x)$ är strängt växande. Å andra sidan, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, alltså satsen om mellanliggande värden (från envariabelanalys) medför att det existerar x sådant att $g(x) = 0$ och ett sådant x är entydigt bestämt.

Detta resonemang visar att $F = 0$ definierar en funktion $x(y, z)$ i hela yz -planet och (m.h.a. implicita funktionssatsen) också att denna funktion faktiskt är \mathcal{C}^1 .

7.3. Implicita funktionssatsen för system

Betrakta ett linjärt system

$$\begin{cases} f := a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ g := a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Geometriskt är lösningsmängd skärningen mellan två plan $f = d_1$ och $g = d_2$. Skärningen är en linje. Om man vill parametrisera linjen med hjälp av t.ex. $z = t$ så är det ekvivalent till att systemet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ z = t \end{cases}$$

är lösbart för varje t , vilket i sin tur är ekvivalent till att

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi ska studera huruvida detta kan generaliseras för *ickelinjära avbildningar*.

Sats 13 (Implicita funktionsssatsen för system). Låt $F(x, y, z)$ och $G(x, y, z)$ är \mathcal{C}^1 -funktioner och (a, b, c) är en lösning till systemet

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases} \quad (7.3)$$

Antag att determinanten

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

i en punkt (a, b, c) på skärningen (7.3). Då finns en omgivning av denna punkt i vilken (7.3) bestämmer två \mathcal{C}^1 -funktioner

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

Exempel 7.5. Visa att ekvationsystem

$$\begin{cases} F = \sin x - e^y + z^2 = 0 \\ G = x^2 + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

kring $(0, 0, 1)$ definierar \mathcal{C}^1 -funktioner $x(z)$ och $y(z)$, och beräkna $x(1), y(1)$, och ange hur man får $x'(1), y'(1)$.

Lösning.

$$\frac{d(F, G)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -e^y \\ 2x & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{d(F, G)}{d(x, y)}(0, 0, 1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Implicitderivering m.a.p. x :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\sin x - e^y + z^2) = 0 \\ \frac{d}{dz}(x^2 + y - z + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x x' - e^y y' + 2z = 0 \\ 2xx' + y' - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos x & -e^y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

I punkten $(0, 0, 1)$: $x(1) = y(1) = 0$ och

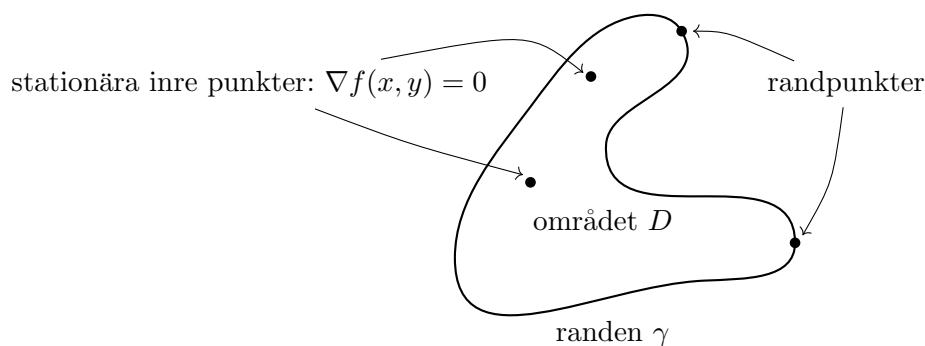
$$\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos x + 2xe^y} \begin{pmatrix} 1 & e^y \\ -2x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,1)} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Optimering

8.1. Optimering på kompakta mängder

Exempel 8.1. För att bestämma största och minsta värde av $f(x) = x^3 - 3x$ på $[0, 2]$ delar vi upp uppgiften i två delar: (i) lokala extrempunkter i öppet intervallet $0 < x < 2$ med hjälp av $f' = 0$ och (ii) ändpunkterna: $x=0$ och $x=2$.

Enligt Satsen 1, kap. 2.4, vet vi att en kontinuerlig funktion på ett kompakt (= begränsat och slutet) område D alltid antar ett största och ett minsta värde. För att bestämma dessa är det tillräckligt att ta fram alla punkter ('kandidater') där största och minsta värde kan finnas och sedan jämföra funktionsvärdena i dessa.



Sammanfattningsvis, samtliga punkter där största och minsta värde kan förekomma:

A) stationära inre punkter.

Analys: lös $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ och sortera bort alla punkter som inte ligger i D ;

B) randpunkter till området.

Analys: representera randen som unionen av kurvor och parametrisera dessa; optimera restriktionen av f (envariabelfunktion) på varje kurva.

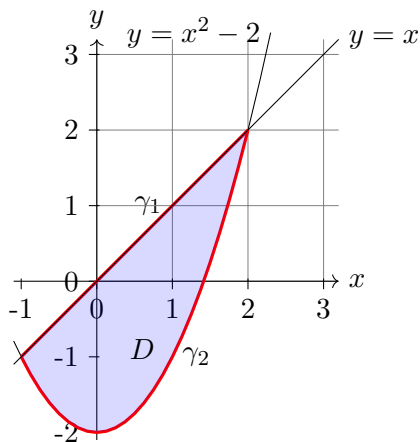
C) inre punkter där gradienten f ej existerar.

Exempel 8.2. Bestäm största och minsta värde av $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ på den slutna mängd som begränsas av kurvorna $y = x$ och $y = x^2 - 2$.

Lösning. A) Inre stationära punkter:

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 4x = 0 \\ f'_y = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (0, \frac{1}{2}) \notin D$$

vilket ej är en inre punkt till vårt område.



B) Vi undersöker nu f på randen. Del γ_1 (se figuren) kan parametreras enligt $(x, y) = (t, t)$, $t \in [-1, 2]$. Detta ger:

$$f(t, t) = 2t^2 + t^2 - t = 3t^2 - t = g_1(t).$$

Vi skall alltså optimera g_1 på det kompakta intervallet $[-1, 2]$: stationära punkter fås genom $g'_1(t) = 6t - 1 = 0$, $t = \frac{1}{6} \in [-1, 2]$, ligger inom intervallet. Funktionsvärde:

$$g_1\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Ändpunkterna:

$$g_1(-1) = 4, \quad g_1(2) = 10.$$

Del γ_2 (parabelns segment) kan parametreras enligt $(x, y) = (t, t^2 - 2)$, $t \in [-1, 2]$. Detta ger:

$$f(t, t) = 2t^2 + (t^2 - 2)^2 - t^2 + 2 = t^4 - 3t^2 + 6 = g_2(t).$$

Vi får

$$g'_2 = 4t^3 - 6t = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0 \in [-1, 2] \text{ eller } t_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \in [-1, 2]$$

Funktionsvärde:

$$g_2(0) = 6, \quad g_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{15}{4}$$

Nu beräknas värde i ändpunkterna (observera att dessa sammanfaller med resp. värde ovan!):

$$g_2(-1) = 4, \quad g_2(2) = 10.$$

C) Det finns inga punkter i vilka f ej är differentierbar, så va har nu fått fram alla intressanta punkter:

$$\begin{aligned} \max_{(x,y) \in D} f(x, y) &= \max\left\{-\frac{1}{12}, 4, 10, 6, \frac{15}{4}\right\} = 10 \\ \min_{(x,y) \in D} f(x, y) &= \min\left\{-\frac{1}{12}, 4, 10, 6, \frac{15}{4}\right\} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

□

8.2. Optimering på ickekompakta mängder

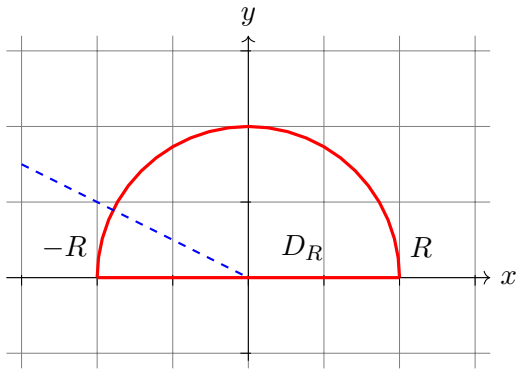
Om mängden D inte längre är kompakt kan man inte konstatera *a priori* att max eller min existerar. Ett enkelt exempel ges av en linjär funktion $f(x, y) = x + y$ på en öppen skiva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Man ska studera både funktionen och (icke-kompakta) området i varje enkelt fall och bestämma vilken metod är lämpligt att använda. Huvudidé här är att ersätta den givna definitionsmängden med ett lämpligt **kompakt** område på vilket metoden av föregående avsnitt kan appliceras.

Exempel 8.3. Vi vill undersöka om funktionen $f(x, y) = (x + y) \exp(-x^2 - y^2)$ antar något största eller minsta värde i övre halvplanet $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

Först observera att i polära koordinater

$$|f(x, y)| = |x + y| \cdot \exp(-x^2 - y^2) = \rho e^{-\rho^2} |\cos \phi + \sin \phi| \leq 2\rho e^{-\rho^2} \rightarrow 0 \quad \text{då } \rho \rightarrow \infty.$$



Det betyder att till varje positiva $\varepsilon > 0$ existerar $R > 0$ sådant att

$$|f(x, y)| < \varepsilon, \quad (8.1)$$

för alla punkter (x, y) som ligger *utanför* halvcirkelskivan

$$D_R := \{(x, y) : y \geq 0 \text{ och } x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Observera också att funktionen antar både positiva och negativa värde i D (funktionen är lika med noll längs linjen $y = -\frac{1}{2}x$, $x \geq 0$, se den streckade blåa linjen). Alltså verkar det rimligt att man kan välja $\varepsilon > 0$ så att *både* största och minsta värdena ska ligga innanför området D_R .

Nu studerar vi detta på ett mer strikt sätt. För att hitta stationära punkter löser vi systemet

$$\begin{cases} f'_x = (1 - 2x(x + y))e^{-x^2 - y^2} = 0 \\ f'_y = (1 - 2y(x + y))e^{-x^2 - y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2x(x + y) \\ 1 = 2y(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 = 4x^2 \end{cases}$$

vilket ger $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eller $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Den andra punkten ligger inte i D . Vi får alltså

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Vi undersöker nu funktionen på randen $y = 0$:

$$g(t) = f(t, 0) = te^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $g'(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$ har vi teckenväxlingsschemat

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$g'(t)$	-	+
$g(t)$	↘ lok.min.	↗ lok.max.

Detta ger två intressanta punkter till:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}},$$

Låt ε väljs godtyckligt sådant att $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2e}}$. Låt $R > 0$ vara sådant att (8.1) håller för detta ε . Betrakta det *kompakta* området D_R . Då finns det både största och minsta värde på halvcirkelskivan D_R och enligt ovan:

$$\max_{D_R} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \min_{D_R} f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Eftersom $|f(x, y)| < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2e}}$ för alla $(x, y) \in D \setminus D_R$ så är $\frac{1}{\sqrt{e}}$ resp. $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ därmed största resp. minsta värde i hela D .

8.3. Ytterligare läsning: *Hur kan man fånga ett lejon i Saharaöknen?*

Mathematical methods.

3. THE METHOD OF PROJECTIVE GEOMETRY. Without loss of generality, we may regard the Sahara Desert as a plane. Project the plane into a line, and then project the line into an interior point of the cage. The lion is projected into the same point.



4. THE BOLZANO-WEIERSTRASS METHOD. Bisect the desert by a line running North \rightarrow South. The lion is either in the E (East) portion or in the W (West) portion; let us suppose him to be in the W portion. Bisect this portion by a line running $E \rightarrow W$. The lion is either in the N portion or in the S portion; let us suppose him to be in the N portion. We continue this process indefinitely, constructing a sufficiently strong fence about the chosen portion at each step. The diameter of the chosen portions approaches zero, so that the lion is ultimately surrounded by a fence of arbitrarily small perimeter

Methods from Mathematical Physics

11. THE SCHRÖDINGER METHOD. At any given moment there is a positive probability that there is a lion in the cage. Sit down and wait.

15. THE ATOM-SPLITTING METHOD. We irradiate the desert with slow neutrons. The lion becomes radioactive, and a process of disintegration sets in. When the decay has proceeded sufficiently far, he will become incapable of showing fight.

Referenser.

A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting by H. Pétard, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 45, No. 7, pp. 446-447.

Optimering med bivillkor

9.1. Optimering med bivillkor

Låt $f(\mathbf{x})$ vara en funktion av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$. Vi vill optimera funktionen f under *bivillkoret* $g(\mathbf{x}) = C$ (eller bivillkoren $g_1(\mathbf{x}) = C_1, \dots, g_k(\mathbf{x}) = C_k$). Även olikheter $h_1(\mathbf{x}) \leq A_1, \dots, h_m(\mathbf{x}) \leq A_m$ kan förekomma

Terminologi:

- f kallas en **målfunktion**;
- ekvationen $g_k(\mathbf{x}) = C_k$ kallas ett **bivillkor**.

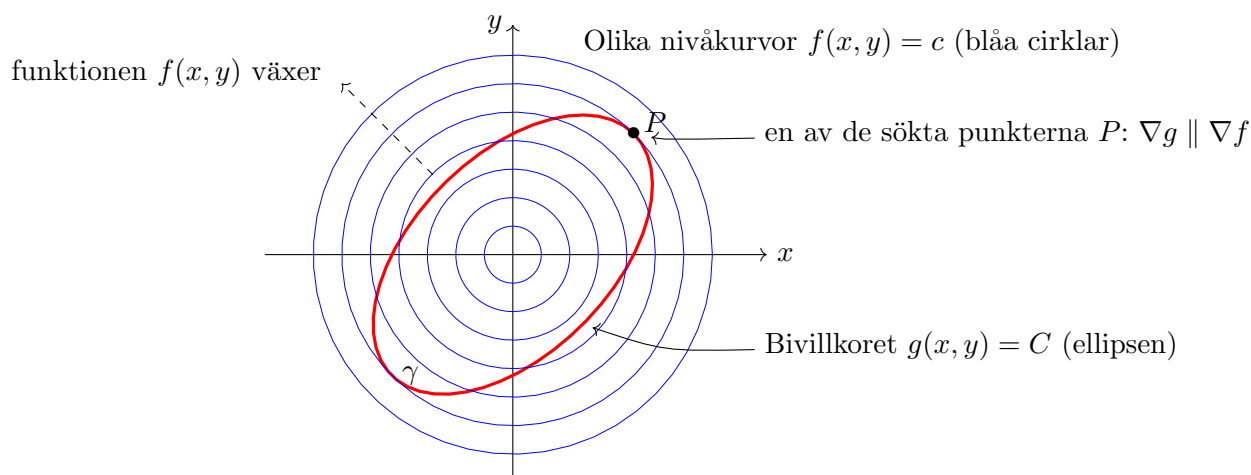
Det påminner randundersökningen i optimering på kompakta mängder men vi vill studera hur man kan lösa problem utan att parametrisera randen.

Exempel 9.1. Bestäm de punkter på ellipsen $x^2 - xy + y^2 = 4$ som ligger på den största avståndet från origo.

Lösning. Här

$$f(x, y) = \text{avståndet mellan } (x, y) \text{ och origo} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

och bivillkoret ges av $g(x, y) := x^2 - xy + y^2 = 4$. Eftersom mängden $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 4\}$ är kompakt (*varför?*), konstaterar vi att den kontinuerliga funktionen f antar sitt största värde på γ .



Alltså: $\nabla f \parallel \nabla g$ vilket är ekvivalent till att determinanten

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2x-y & 2y-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(2y-x) - y(2x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

Alltså ska 'intressanta' punkter på uppfylla $y = \pm x$ tillsammans med bivillkoret $x^2 - xy + y^2 = 4$ vilket ger

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} y = -x \\ 3x^2 = 4 \end{cases}$$

Det första systemet ger två punkter $(2, 2)$ och $(-2, 2)$ med resp. funktionsvärdena $f(2, 2) = f(-2, -2) = 2\sqrt{2}$, och det andra systemet ger $(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ och $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ med resp. funktionsvärdena $f(\mp \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

*) Ett undantagsfall: $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$ ger $2x - y = 2y - x = 0$, alltså $(x, y) = (0, 0)$ som *inte* ligger på γ .

Sammanfattningsvis är $2\sqrt{2}$ det strsta avståndet.

Allmänt gäller följande satsen. Vi antar att både f och g är av klass \mathcal{C}^1 .

Sats 14. Antag att punkten (a, b) är en lokal extrempunkt till funktionen $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = C$. Antag vidare att (a, b) är en inre punkt till definitionsmängder D_f och D_g . Då gäller det att $\nabla f(a, b) \parallel \nabla g(a, b)$. Allmänt, antag att $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ är en lokal extrempunkt till funktionen $f(\mathbf{x})$ under bivillkoren $g_1(\mathbf{x}) = C_1, \dots, g_k(\mathbf{x}) = C_k$ och antag att \mathbf{a} är en inre punkt till $D_f \cap D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_k}$. Då gäller det att $\nabla f(\mathbf{a}), \nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_k(\mathbf{a})$ är linjärt beroende.

Bevis för $n = 2$ och $k = 1$. Fallet $\nabla g(a, b) = \mathbf{0}$ är trivialt. Antag att $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$. Enligt implicita funktionsenssatsen kan vi parametrisera $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = C\}$ i en omgivning av (a, b) : $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ så att $\mathbf{x}(0) = (a, b)$ och $g(\mathbf{x}(t)) = C$. Den nya funktionen av en variabel $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$ har ett (lokalt) extremvärde i $t = 0$, så det gäller att $h'(0) = 0$. Enligt kedjeregeln:

$$0 = h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \frac{dy}{dt}(0) \Leftrightarrow \nabla f(a, b) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(a, b) \perp \dot{\mathbf{x}}(0),$$

d.v.s. $\nabla f(a, b)$ och tangentvektorn till nivåkurvan γ är ortogonala. Det betyder att $\nabla f(a, b)$ är en normalvektor till γ , alltså den är parallell med gradienten $\nabla g(a, b)$, v.s.b. \square

Algoritmen:

- (i) Visa att ett optimalt värde existerar (ofta *ad hoc*)
- (ii) Bestäm 'kandidater' genom att lösa sambandet $\nabla f \parallel \nabla g$ tillsammans med bivillkoret $g(x, y) = C$.
- (iii) Optimera: beräkna funktionens värdena i kandidaterna och bestäm det extremala värdet .

Anmärkning. I (ii) kan man bestämma intressanta punkter genom att skriva

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f = \lambda \nabla g, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{ii a})$$

λ kallas för **Lagranges multiplikatorn**. Alternativt kan man använda **determinanten**

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ii b})$$

Alternativet (iib) förefaller ofta enklare än det första (Lagranges) alternativet (iia), men (iib) fungerar bara för två variabler.

Exempel 9.2. Bestäm det största värde av $f(x, y, z) = xyz$ på enhetsfären i \mathbb{R}^3 .

Lösning. Vi använder Lagranges multiplikator metod under bivillkoret $g := x^2 + y^2 + z^2 = 1$, alltså

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Om $\lambda = 0$ så får vi att det finns exakt två koordinater är lika med noll (varför?). Det ger 6 punkter $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ och $(0, 0, \pm 1)$ för vilka $f = 0$. Antag nu att $\lambda \neq 0$. Ett enkelt resonemang visar att $xyz \neq 0$ (ty, om t.ex. $x = 0$ så $yz = \lambda \cdot 0 = 0$, alltså $y = 0$ eller $z = 0$ vilket medför att $\lambda = 0$). Genom att dividera ekvationer får vi $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$. Detta ger oss 8 punkter $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ där alla teckenkombinationer kan förekomma. Funktionens värde är antingen $f = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (sökta största värde) eller $f = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (sökta minsta värde).

En **alternativ lösning via determinanter**. Notera att två vektorer i \mathbb{R}^3 är parallella om och endast om

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla g = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ g'_x & g'_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} yz & xz \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 0$$

vilket ger i vårt fall:

$$\begin{cases} z(y^2 - x^2) = 0 \\ y(z^2 - x^2) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Vi har alltså två alternativen: antingen $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$ eller två koordinater är lika med noll, och sedan som ovan.

9.2. Optimering med två bivillkor

Vi skall nu studera problemet att optimera en funktion $f(x, y, z)$ under två bivillkor

$$g(x, y, z) = C_1, \quad h(x, y, z) = C_2.$$

Enligt satsen, gradienterna är linjärt beroende, vilket ger systemet

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0 \\ g = C_1 \\ h = C_2 \end{cases}$$

Exempel 9.3. Planet $x + y + z = 2$ skär cylindern $y^2 + z^2 = 4$ längs en ellips. Bestäm den punkt på ellipsen som ligger närmast origo.

Lösning. Vi använder Lagranges multiplikators metod för $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (avståndet i kvadrat) under bivillkoren $g := x + y + z = 2$ och $h := y^2 + z^2 = 4$, alltså

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(y - z) = 0$$

Tillsammans med bivillkoren ger det systemet

$$\begin{cases} x(y-z) = 0 \\ x+y+z = 2 \\ y^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

a) I fallet $x = 0$ får vi $y+z = 2$ och $y^2+z^2 = 4$ vilket ger två punkter: $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$.

b) I fallet $x \neq 0$ har vi systemet

$$\begin{cases} y = z \\ x+y+z = 2 \\ y^2+z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x+2z = 2 \\ z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x+2z = 2 \\ z^2 = 2 \end{cases}$$

vilket ger $z = \pm\sqrt{2}$ och alltså ytterligare två punkter:

$$(2 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{och} \quad (2 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Vi beräknar funktionsvärdena i dessa punkter:

$$f(0, 2, 0) = f(0, 0, 2) = 4, \quad f(2 - 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16 - 8\sqrt{2}, \quad f(2 + 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 16 + 8\sqrt{2},$$

vilket medför att minsta avståndet är $\sqrt{4} = 2$ och det uppnås i punkterna $(0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$.

9.3. Optimering med godtyckliga bivillkor

Se även ett exempel på <http://courses.mai.liu.se/GU/TATA43/Dokument/opt-kompl.pdf> (L. Alexandersson).

Exempel 9.4. Optimera $f = xy + 2z$ då $g = x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ och $h = x + y + z \geq 0$.

Lösning. Mängden D som ges av bivillkoren $g \leq 6$ och $h \geq 0$ är sluten och begränsad, alltså kompakt. Funktionen f är kontinuerlig, så f antar sitt största och minsta värde på D . Vi har följande uppdelningen:

$$D = B \cup S_1 \cup S_2 \cup \gamma, \quad \text{där}$$

- (i) B är ett halvklot $\{g < 6, h > 0\}$;
- (ii) S_1 är ett halvsfär $\{g = 6, h > 0\}$;
- (iii) S_2 är en cirkelskiva $\{g < 6, h = 0\}$;
- (iv) γ är en cirkel $\{g = 6, h = 0\}$.

Nu optimerar vi på var och en av dessa. (i) Optimering med bara stationära punkter:

$$\begin{cases} \nabla f = 0 \\ g < 6 \\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \\ f'_z = 2 = 0 \\ g < 6 \\ h > 0 \end{cases}$$

lösningen saknas, alltså finns inga stationära punkter i B .

(ii) Optimering med ett bivillkor ($g = 6$). Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f \times \nabla g = 0 \\ g = 6 \\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \\ yz = 2x \\ xz = 2y \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z > 0 \end{cases}$$

Om $x = 0$ så $y = 0$, alltså $z = +\sqrt{6}$ ($z = -\sqrt{6}$ uppfyller inte olikheten $h > 0$) vilket ger

$$f(0, 0, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

I fall om $x \neq 0$ får vi antingen $x = y \neq 0$ med $z = 2$, alltså $(1, 1, 2)$ (den andra lösningen $(-1, -1, 2)$ uppfyller inte olikheten $h > 0$) vilket ger ytterligare en kandidat

$$f(1, 1, 2) = 5$$

eller $x = -y$ och $z = -2$. Här lösningarna saknas (uppfyller inte $h > 0$).

(iii) Optimering med ett bivillkor ($h = 0$). Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f \times \nabla h = 0 \\ g < 6 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 < 6 \\ z = -4 \end{cases}$$

Eftersom $2^2 + 2^2 + (-4)^2 = 24 \not< 6$, lösningen saknas.

(iv) Optimering med två bivillkor ($h = 0, g = 6$). Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0 \\ g = 6 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} y & x & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(x+y-2-z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- Om $y = x$ så $z = -2x$, alltså $(1, 1, -2)$ eller $(-1, -1, 2)$:

$$f(1, 1, -2) = -3, \quad f(-1, -1, 2) = 5$$

- Om $x + y = 2 + z$ så får vi från den tredje ekvationen att $z = -1$, alltså $(2, -1, -1)$ och $(-1, 2, -1)$:

$$f(2, -1, -1) = f(-1, 2, -1) = -4$$

Eftersom

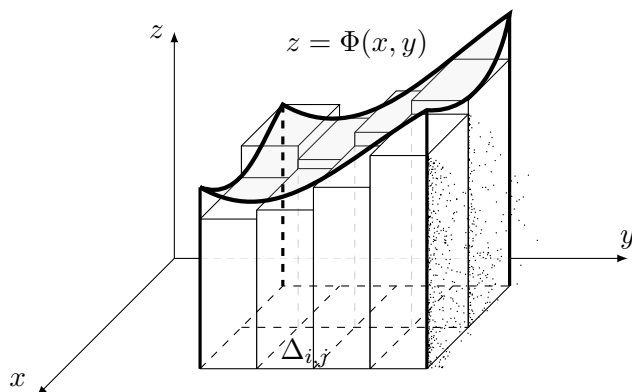
$$-4 < -3 < 2\sqrt{6} = \sqrt{24} < 5 = \sqrt{25}$$

får vi att det största och minsta värdena är resp. 5 och -4 .

Dubbelintegraler

10.1. Dubbelintegraler över rektangel

Idé är att approximera grafen till en kontinuerlig funktion med trappfunktioner:



En **trappfunktion** Φ av två variabler är en funktion som är definierad i en *axelparallell* rektangel

$$\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

och som har egenskapen att det finns en indelning av Δ i mindre rektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j\}$$

på sådant sätt att Φ har ett konstant värde c_{ij} på Δ_{ij} :

$$\Phi(x, y) = c_{ij} \quad \text{då} \quad (x, y) \in \Delta_{ij},$$

Grafen av en sådan funktion Φ genererar ett antal rätblock med sidorna parallella med koordinataxlarna.

Definition 10.1. Dubbelintegralen av Φ över Δ definieras som talet

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy := \sum_{i,j} c_{ij} \cdot \text{Areal}(\Delta_{ij}) = \sum_{i,j} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}).$$

- Integralen av Φ tolkas som den totala **volyman av rätblocken i figuren**. Speciellt,

$$\iint_{\Delta} 1 \, dx dy = \text{Areal}(\Delta).$$

Observera dock att staplar som ligger under xy -planet ger negativt bidrag till integralen.

- En ytterligare uppdelning av en eller flera rektanglarna Δ_{ij} i mindre delrektanglar kallas en **förfining** av den ursprungliga indelningen av Δ . Integralen av Φ över Δ påverkas inte av en sådan förfining.

- Integralen beror linjärt på integranden:

$$\iint_{\Delta} \alpha \Phi(x, y) \, dx dy = \alpha \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (10.1)$$

$$\iint_{\Delta} (\Phi(x, y) + \Psi(x, y)) \, dx dy = \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy + \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy. \quad (10.2)$$

- Det gäller **monotonicitetsprincipen**

$$\Phi \leq \Psi \quad \text{på} \quad \Rightarrow \quad \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy, \quad (10.3)$$

- Det gäller ‘**triangelolikheten**’

$$\left| \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Phi(x, y)| \, dx dy. \quad (10.4)$$

- Integralen är **additiv**: om Δ_1 och Δ_2 är två rektanglar som enbart har en gemensam sida så gäller

$$\iint_{\Delta_1} \Phi(x, y) \, dx dy + \iint_{\Delta_2} \Phi(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta_1 \cup \Delta_2} \Phi(x, y) \, dx dy \quad (10.5)$$

- Det gäller sambandet mellan dubbelintegral och **itererad (enkel)integral**:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(x, y) \, dx \right) dy \quad (10.6)$$

Den första likhet betyder att volymen av rätblocken i figuren alternativt kan räknas med hjälp av snittytor av de rätblock som bestäms av Φ skärs med ett plan genom $(x, 0, 0)$ ortogonalt mot x -axeln.

Nu låt f vara en godtycklig begränsad funktion på Δ . Då existerar två konstanter $m \leq M$ sådana att $m \leq f(x, y) \leq M$ i Δ . Det betyder att det finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att

$$\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \Delta. \quad (10.7)$$

Definition 10.2. Vi säger att f är **(Riemann) integrerbar** över rektangeln Δ om det till varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och

$$\iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy < \epsilon.$$

Sats 15. Om f är integrerbar över rektangeln Δ så finns precis ett tal I med egenskapen att

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx dy \leq I \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx dy$$

för alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \leq f \leq \Psi$.

Låt f vara integrerbar över Δ . Det entydigt bestämda talet I i Sats 15 kallas **dubbelintegralen** av f över Δ ,

$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy.$$

Sats 16 (Upprepad integration). Om f är integrerbar över $\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ och om integralen i högra led existerar så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right)}_{\text{tvärsnittsarean } A(x) \text{ vid } x} dx. \quad (10.8)$$

Motsvarande utsaga gäller också med omvänd integrationsordning i högerledet.

Bevis. För alla trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \leq f \leq \Psi$ och för alla $x \in [a, b]$ gäller

$$\int_c^d f dy \leq \int_c^d \Psi dy \Rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d f dy \right) dx \leq \int_a^b \left(\int_c^d \Psi dy \right) dx \stackrel{\text{m.h.a. (10.6)}}{=} \iint_{\Delta} \Psi dx dy,$$

alltså

$$\iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \int_a^b \left(\int_c^d f dy \right) dx \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy,$$

vilket betyder att $\int_a^b \left(\int_c^d f dy \right) dx$ uppfyller villkoret på I i Sats 15. Eftersom f är integrerbar över Δ finns precis ett sådant I , v.s.b. \square

Sats 17. Om $f(x, y)$ är kontinuerlig på Δ så är f integrerbar över Δ och formeln (10.8) gäller.

Exempel 10.1. Låt Δ vara rektangeln $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$. Beräkna

$$I := \iint_{\Delta} (x^2 - 2y) dx dy.$$

Lösning. Integranden är kontinuerlig på Δ , varför får vi beräkna integralen med itererad integration. Först bestämmer vi för fixt x :

$$A(x) = \int_0^2 (x^2 - 2y) dy = [x^2 y - y^2]_{y=0}^{y=2} = 2x^2 - 4.$$

Därefter erhålles dubbelintegralen som

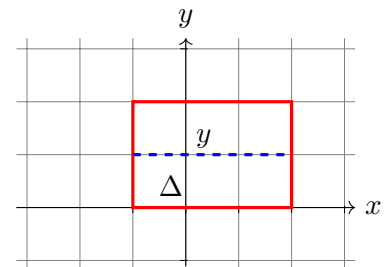
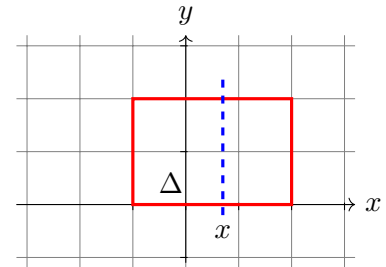
$$I = \int_{-1}^2 A(x) dx = \int_{-1}^2 (2x^2 - 4) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x \right]_{-1}^2 = -6.$$

Detta problem kan också lösas genom att man integrerar först med avseende på x :

$$A(y) = \int_{-1}^2 (x^2 - 2y) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2yx \right]_{x=-1}^{x=2} = 3 - 6y,$$

alltså

$$I = \int_0^2 A(y) dy = \int_0^2 (3 - 6y) dy = [-3y^2 + 3y]_0^2 = -6.$$



10.2. Integration över godtyckliga områden

Definition 10.3. En begränsad funktion f på en begränsad mängd D kallas **integrerbar över D** om

$$f_D(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{när } (x, y) \in D \\ 0 & \text{när } (x, y) \notin D \end{cases}$$

är integrerbar över någon rektangel Δ som omfattar D . Vi sätter då

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_{\Delta} f_D(x, y) dx dy.$$

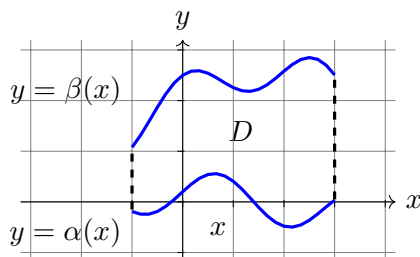
- Definitionen påstår indirekt att integrerbarheten och integralen är oberoende av vilken rektangel $\Delta \supset D$ vi väljer.
- Om f och g är integrerbara över D så gäller egenskaperna (10.1)–(10.5) med $\Phi \rightsquigarrow f$ och $\Psi \rightsquigarrow g$.

Definition 10.4. En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ kallas en **nollmängd** om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt antal axelparallella rektanglar vars sammanlagda area är högst ϵ . En mängd D kallas **kvadrerbar** (eller **mätbar**) om dess rand är en nollmängd.

- En kurva i \mathbb{R}^2 är en nollmängd, alltså ett område vars rand består av sådana kurvor är kvadrerbar.

Sats 18. Om f är kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar kompakt mängd D då är f integrerbar över D .

Sats 19 (Upprepad integration). Om f är kontinuerlig på en mängd $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b\}$, där $\alpha(x) \leq \beta(x)$ är kontinuerliga, så är f integrerbar över D och



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (10.9)$$

Motsvarande formel gäller också för integration först i x -led och därefter i y -led.

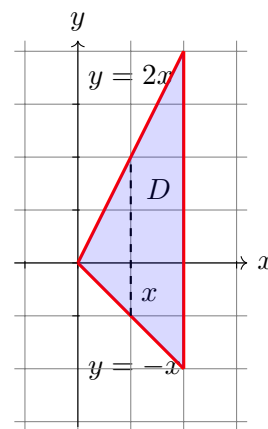
Exempel 10.2. Låt D vara triangeln $-x \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 2$. Beräkna

$$I := \iint_{\Delta} 2xy dx dy$$

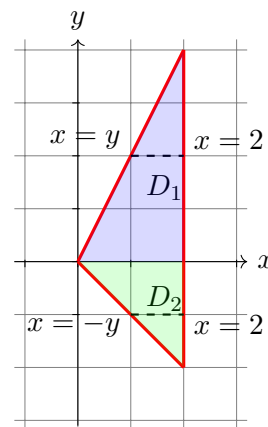
Lösning. Vi börjar i y -led: vi låter först y gå mellan $-x$ och $2x$, och sedan x från 0 till 2:

$$\begin{aligned} \iint_D 2xy dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{y=-x}^{y=2x} 2xy dy \right) dx = \int_0^2 [xy^2]_{y=-x}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=2} = 12. \end{aligned}$$

Om vi integrerar i x -led först så får vi problemet att den undre gränsen inte blir densamma för hela området. För positiva y så har vi som tidigare $y = 2x \Rightarrow x = y/2$, men för negativa y blir den undre gränsen $y = -x \Rightarrow x = -y$:



$$\begin{aligned} \iint_D 2xy dx dy &= \iint_{D_1} 2xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy = \\ &= \int_{-2}^0 \left(\int_{x=-y}^{x=2} 2xy dx \right) dy + \int_0^4 \left(\int_{x=y/2}^{x=2} 2xy dx \right) dy = \\ &= \int_{-2}^0 [yx^2]_{x=-y}^{x=2} dy + \int_0^4 [yx^2]_{x=y/2}^{x=2} dy = \\ &= \int_{-2}^0 (4y - y^3) dy + \int_0^4 (4y - \frac{1}{4}y^3) dy = \\ &= -4 + 16 = 12. \end{aligned}$$



Funktionalmatriser. Variabelbyte i integraler

11.1. Funktionalmatriser. Funktionaldeterminanter

Låt $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, där

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

vara en avbildning av typen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ som är definierad i en öppen delmängd av \mathbb{R}^n . Avbildningen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ kallas **differentierbar** i punkten \mathbf{a} om det existerar en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sådan att

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}\| = \omega(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \quad \text{där } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \omega(\mathbf{h}) = 0.$$

Ex varje linjär avbildning är differentierbar. Allmänt gäller det:

Sats 20. Avbildningen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ är differentierbar i $\mathbf{a} \Leftrightarrow$ varje komponent $f_j(\mathbf{x})$ är differentierbar i \mathbf{a} . Om $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ är differentierbar i \mathbf{a} så

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \equiv \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

Vi säger att $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ är av klassen \mathcal{C}^1 om varje komponent är av klassen \mathcal{C}^1 .

Matrisen $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ i (11.1) kallas **funktionalmatris** (eller **Jacobimatris**) och dess determinant kallas **funktionaldeterminant** (eller **Jacobian**):

$$\frac{d(f_1, \dots, f_p)}{d(x_1, \dots, x_n)} := \det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)$$

Betrakta en \mathcal{C}^1 avbildning $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Då gäller det

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}. \quad (11.2)$$

Avbildningen $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ kallas **linjärisering** av \mathbf{f} i punkten \mathbf{a} .

Exempel 11.1. Funktionalmatrisen av en reellvärd funktion $y = f(x_1, x_2, x_3)$ är dess gradien:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right).$$

Exempel 11.2. Om $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ är en linjär avbildning så är A funktionalmatrisen av \mathbf{f} .

Exempel 11.3. Betrakta polära koordinater $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$. Eftersom

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi,$$

har denna avbildning från $r\varphi$ -planet till xy -planet funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

med funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \varphi)} = r.$$

Exempel 11.4. På liknande sätt, om

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

är rymdpolära koordinater så får vi funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

med funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x, y, z)}{d(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta.$$

11.2. Kedjeregeln. Inversfunktion. Areaskalan

Betrakta en sammansatt funktion $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{t})$ av typen. $\mathbb{R}^q \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^p$ En direktföljd av kedjeregeln är

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g}'.$$

Sats 21 (Inversa funktionssatsen). Låt $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en \mathcal{C}^1 -avbildning och \mathbf{a} vara en punkt i definitionsmängden sådan att

$$\det \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \neq 0.$$

Då finns öppna omgivningar U och V av \mathbf{a} resp. $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ sådana att avbildningen $\mathbf{f} : U \rightarrow V$ är bijektiv och inversen $\mathbf{f}^{-1} : V \rightarrow U$ är en avbildning av klassen \mathcal{C}^1 .

Låt $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en avbildning och P en liten axelparallell rektangel nära punkten $\mathbf{a} \in D_{\mathbf{f}}$. Då har vi enligt (11.2) att för små $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$, kan \mathbf{f} approximeras med hjälp av

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h},$$

d.v.s. en sammansatt linjär avbildning $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{f}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$ följd av förskjutningen $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{y}$. Eftersom förskjutningen påverkar inte arean, får vi den **lokala areaförstörningen** under avbildningen $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\frac{\text{arean av } \mathbf{f}(P)}{\text{arean av } P} \approx |\det \mathbf{f}'(\mathbf{a})|$$

Exempel 11.5. Betrakta avbildningen $\mathbf{f} := \begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases}$. Visa att avbildningen i någon omgivning till $(x, y) = (2, 3)$ har en \mathcal{C}^1 -invers som är definierad i en motsvarande omgivning till $(6, 5)$. Beräkna $x'_u(6, 5)$ och $x'_v(6, 5)$.

Lösning. Enligt kedjeregeln ovan, $\mathbf{f}' \cdot (\mathbf{f}^{-1})' = \mathbf{I}$, enhetsmatrisen, alltså

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}.$$

Eftersom

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(2, 3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(6, 5) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Identifiering ger: $x'_u(6, 5) = 1$ och $x'_v(6, 5) = -2$.

11.3. Riemannsummor. Variabelbyte i dubbelintegraler

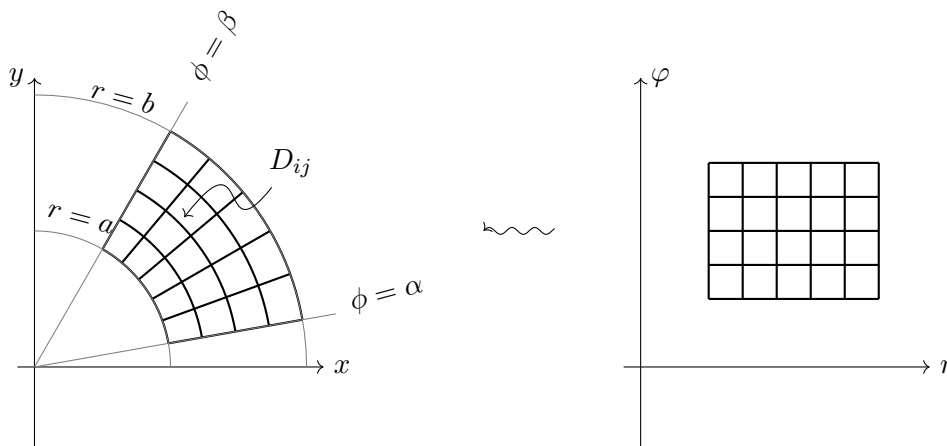
Låt f vara en kontinuerlig funktion definierad på en kompakt rektangel Δ . Antag att Δ är indelad i delrektanglar Δ_k och att vi för varje sådan delrektangel valt en punkt $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta_k$. Summan

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k) \text{Arean}(\Delta_k)$$

kallas **Riemannsumma**. Formelmässigt kan vi skriva att

$$\sum_k f(\xi_k, \eta_k) \rightarrow \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \quad \text{vid obegränsad förfinad indelning}$$

Exempel 11.6 (Areaskalan för polära koordinater). Låt D vara den slutna sektorringen som ges i polära koordinater av $a \leq r \leq b$ och $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Vi delar in D i små sektorringar $D_{ij} = \{r_{i-1} \leq r \leq r_i, \varphi_{j-1} \leq \varphi \leq \varphi_j\}$:



vilket ger

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy &\approx \sum_k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \text{Areal}(D_{ij}) = \sum_k f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \frac{\text{Areal}(D_{ij})}{\text{Areal}(\Delta_{ij})} \cdot \text{Areal}(\Delta_{ij}) \approx \\ &\approx \iint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \end{aligned}$$

Exempelvis, om D är en cirkelring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ så $\Delta = \{1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, alltså

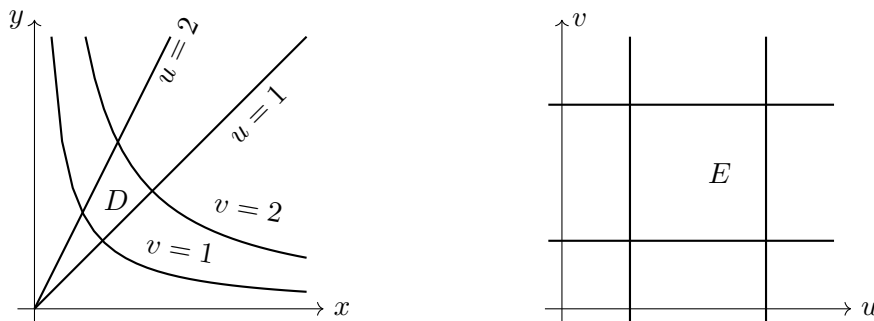
$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_{\Delta} (r \cos \varphi)^2 \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \left(\int_1^2 r^3 dr \right) d\varphi = \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{15\pi}{4}$$

Sats 22. Låt $(x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ vara en bijektiv \mathcal{C}^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet, sådan att $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ i E . Då r

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv.$$

Exempel 11.7. Beräkna $\iint_D xy dx dy$ där D ges av $x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2$ i den första kvadranten $x \geq 0, y \geq 0$.

Lösning. Ett naturligt variabelbyte: $u = y/x$ och $v = xy$, se bilden. Avbildningen är bijektiv i D och beskriver en axelparallell rektangel $E = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ i uv -planet.



Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} = -2u \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right| = \left| \left(\frac{d(u, v)}{d(x, y)} \right)^{-1} \right| = \frac{1}{2u} \quad (\text{för positiva } u)$$

alltså

$$\iint_D xy dx dy = \iint_E v \cdot \frac{1}{2u} du dv = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{v}{2u} du \right) dv = \int_1^2 \frac{1}{2u} du \cdot \int_1^2 v dv = \frac{3}{4} \ln 2.$$

Exempel 11.8. Betrakta $\iint_D x dx dy$ där D är parallelogrammen med hörn i $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$ och $D(4, 4)$. Ett affint variabelbyte fås ur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot u + \overrightarrow{AC} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 1+u+2v \\ 1+2u+v \end{pmatrix},$$

där $0 \leq u, v \leq 1$. Följaktligen $x = 1 + u + 2v$ samt

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \Rightarrow \quad |J(u, v)| = 3.$$

$$\iint_D x dx dy = \iint_E 3(1+u+2v) du dv = 3 \int_0^1 \left(\int_0^1 (1+u+2v) du \right) dv = 3 \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + 2v \right) dv = \frac{15}{2}$$

Trippelintegraler

Analogt med dubbelintegralen utgår man från trappfunktioner på ett axelparallellt rätblock Δ som utvidgas för en kontinuerlig funktion f på ett kvadrerbart område $D \subset \mathbb{R}^3$ till **trippelintegralen**:

$$\iiint_{\Delta} \Phi(x, y, z) \, dx dy dz := \sum_{i,j,k} c_{ijk} \cdot \text{Volymen}(\Delta_{ijk}) \rightsquigarrow \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Viktiga tillämpningar:

$$V(D) = \iiint_D 1 \, dx dy dz = \text{volymen av } D$$

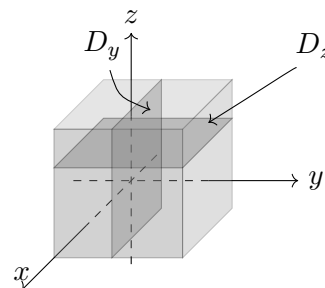
$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \text{massan av kroppen } D \text{ en med densitet } \rho(x, y, z)$$

Variabelbyte:

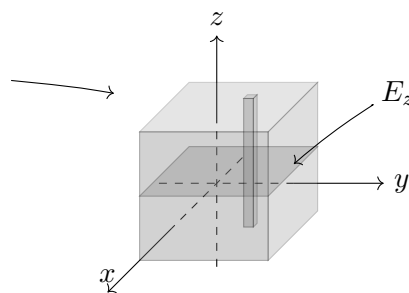
$$\iiint_D f(\mathbf{x}) \, dx dy dz = \iiint_E f(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \cdot \left| \frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{u})} \right| \, du dv dw$$

Upprepad integration: om D är ett rätblock $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2, c_1 \leq z \leq c_2\}$ så gäller

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz = \\ \text{(med "skivor")} &= \int_{b_1}^{b_2} \left(\iint_{D_y} f(x, y, z) \, dx dz \right) dy = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) \, dy dz \right) dx \end{aligned}$$



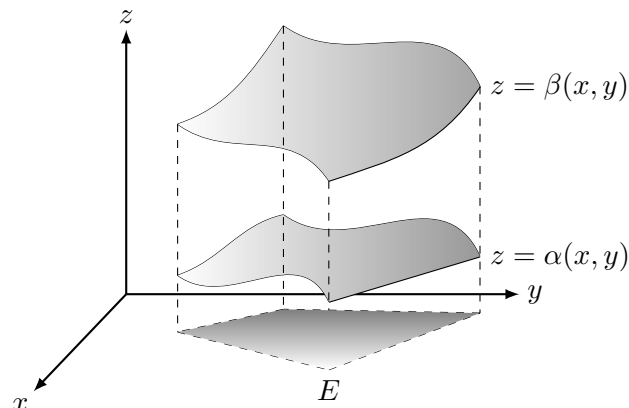
$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{E_z} \left(\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy = \\ \text{(med "stavar")} &= \iint_{E_y} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y, z) \, dy \right) dx dz = \\ &= \iint_{E_x} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) \, dx \right) dy dz \end{aligned}$$



Allmänt gäller följande formler:

- projektion på koordinataxel (z -axeln, **stavar**), t.ex. $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in E\}$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_E dx dy \int_{z=\alpha(x,y)}^{z=\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$



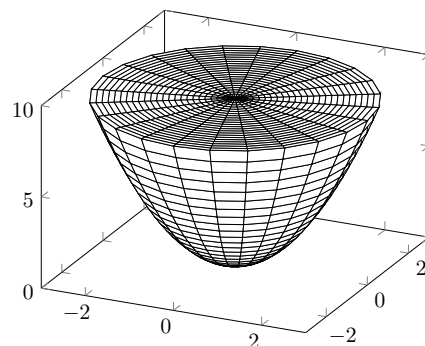
- projektion på koordinatplan (xy -planet, **skivor**),

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) \, dx dy \right) dz,$$

där $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in D\}$ och $[a, b]$ är projektion av D på z -axeln.

Exempel 12.1 (Trippelintegral). Betrakta $\iiint_D z \, dx dy dz$ över kroppen $D = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}$. Integration med stavar m.h.a. polära koordinater:

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=9} z \, dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=9} dx dy = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \frac{1}{2} (81 - (x^2 + y^2)^2) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=3} (81 - r^4) r dr \right) d\varphi = \pi \left[\frac{81}{2} r^2 - \frac{1}{6} r^6 \right]_0^3 = 243\pi \end{aligned}$$

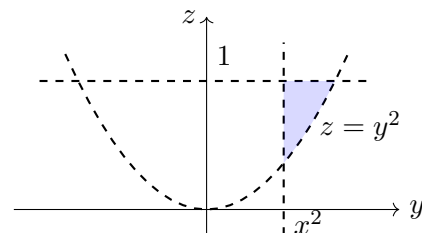


Integration med skivor:

$$\iiint_D z \, dx dy dz = \int_{z=0}^{z=9} \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} z \, dx dy \right) dz = \int_{z=0}^{z=9} z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} r dr = 2\pi \int_{z=0}^{z=9} \frac{z^2}{2} dz = 243\pi$$

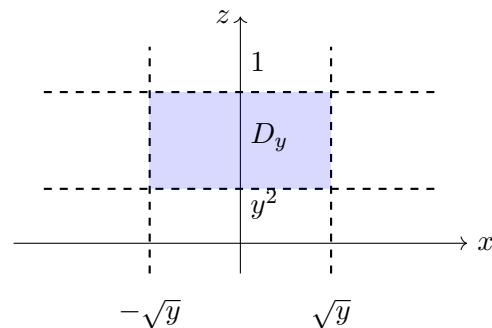
Exempel 12.2 (Volym). Beräkna volymen av kroppen $D = \{x^2 \leq y \leq \sqrt{z} \leq 1\}$. Först via skivor på fixa x -nivåer: $-1 \leq x \leq 1$ och $D_x = \{x^2 \leq y \leq \sqrt{z} \leq 1\} = \{x^2 \leq y\} \cap \{y^2 \leq z \leq 1\}$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \iint_{D_x} 1 \, dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{y=x^2}^{y=1} dy \int_{z=y^2}^{z=1} dz = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (1 - y^2) dy = \int_{-1}^1 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} - x^2 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{16}{21}. \end{aligned}$$



Nu integrerar vi via skivor på fixa y -nivåer: för ett fixt $y \in [0, 1]$ får vi $0 \leq y \leq 1$ och

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_y} 1 \, dx dz \right) dy = \\ &= \int_0^1 \text{Area}(D_y) \, dy = \int_0^1 2\sqrt{y} \cdot (1 - y^2) \, dy \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} y^{2/3} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right]_0^1 = \frac{16}{21} \end{aligned}$$



Exempel 12.3 (Variabelbyte). Beräkna $\iiint_D y^2 dx dy dz$ över $D : 4x^2 + 4xy + 10y^2 \leq x + y - z \leq 1$.

Lösning. Kvadratkomplettering ger $(2x + y)^2 + (3y)^2 \leq x + y - z \leq 1$. Betrakta ett linjärt byte:

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3y \\ w = x + y - z \end{cases} \Rightarrow \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow \left| \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} \right| = \frac{1}{6}.$$

Så ser vi också att variabelbytet är bijektivt. Det nya området blir $E = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq w \leq 1\}$, se Exempel 12.1 ovan. Följaktligen,

$$\begin{aligned} \iiint_D y^2 dx dy dz &= \iiint_E \frac{1}{6} \left(\frac{v}{3}\right)^2 dx dy dz = \int_0^1 dw \iint_{u^2 + v^2 \leq w} \frac{v^2}{54} dudv = \\ &\quad \text{(planpolära koordinater)} \\ &= \int_0^1 dw \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{w}} \rho \cdot \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{54} d\rho = \frac{\pi}{27 \cdot 4} \int_0^1 w^2 dw = \frac{\pi}{324} \end{aligned}$$

Exempel 12.4 (Rymdpolärt byte). Beräkna

$$\iiint_D x^2 z \, dx dy dz$$

där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ och $0 \leq x \leq y$.

Lösning. Mängden D är en åttondels 'glass-strut'; olikheterna kan i tur och ordning översättas till

$$E = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6, \\ \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Rymdpolärt byte

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad \frac{d(x, y, z)}{d(\rho, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

och ny mängd E med gränser enligt ovan. Vi får

$$\begin{aligned} \iiint_E x^2 z \, dx dy dz &= \iiint_E (r \cos \varphi \sin \theta)^2 r^2 \sin \theta \cdot r \cos \theta \cdot r dr d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi/6} \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi - 2}{384}. \end{aligned}$$

Ytterligare area- och volymberäkningar

13.1. Volym- och areaberäkningar

Exempel 13.1 (Areaberäkning). Bestäm arean av ellipsskivan $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Lösning. Betrakta linjärt byte till enhetscirkelskiva:

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases} \Rightarrow E := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}, \quad \text{och} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ab$$

alltså:

$$\text{Areal}(D) = \iint_D dx dy = \iint_E ab \, du dv = ab \cdot \text{Areal}(E) = \pi ab$$

Exempel 13.2 (Volymberäkning). Bestäm volymen av kroppen D som begränsas av paraboloiden $4z = x^2 + 2y^2$ och planet $z = y + 4$.

Lösning. Integrerar via stavar i z -led. Vi bestämmer först projektionen av D på xy -planet: skärningen av paraboloid med planet blir en ellipsskiva

$$\begin{cases} 4z = x^2 + 2y^2 \\ z = y + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4y + 16 \Leftrightarrow x^2 + 2(y - 1)^2 = 18$$

vilket visar att integrationsområdet D ligger över ellipsskivan $E = \{x^2 + 2(y - 1)^2 \leq 18\}$ mellan överfunktionen $\beta(x, y) = y + 4$ och underfunktionen $\alpha(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{4}$, alltså

$$\text{Vol}(D) = \iint_E \left(y + 4 - \frac{x^2 + 2y^2}{4} \right) dx dy$$

Ett linjärt variabelbyte ger en cirkelskiva

$$\begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{2}(y - 1) \end{cases} \Rightarrow E' := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 18\}, \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

och integranden blir

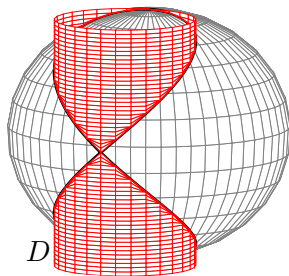
$$y + 4 - \frac{x^2 + 2y^2}{4} = \frac{4y + 16 - x^2 - 2y^2}{4} = \frac{18 - u^2 - v^2}{4}$$

vilket ger m.h.a. polära koordinater

$$\text{Vol}(D) = \iint_{u^2+v^2 \leq 18} \frac{18 - u^2 - v^2}{4\sqrt{2}} dudv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} \frac{18 - \rho^2}{4\sqrt{2}} \cdot \rho d\rho = \sqrt{2}\pi \left[\frac{9\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{16} \right]_0^{3\sqrt{2}} = \frac{81\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exempel 13.3. I ett klot med radie 1 borrar ett cylindriskt hål med radie $1/2$ så att klotet blir $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och cylindern $(x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4$. Beräkna den bortborrade delens D volym.

Lösning.



Integrerar via stavar i z -led. Projektionen av D på xy -planet är cirkelskiva $E = \{(x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$. Överfunktionen och underfunktionen är respektive:

$$\beta(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ och } \alpha(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

alltså

$$\text{Vol}(D) = \iint_E 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

Planpolära koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, \quad \rho \leq \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

alltså $E = \{(x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}$ blir

$$\rho^2 - \rho \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Vol}(D) = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \left| \begin{array}{l} t = 1 - \rho^2 \\ dt = -2\rho d\rho \\ \rho = \cos \varphi \rightarrow t = \sin^2 \varphi, \\ \rho = 0 \rightarrow t = 1, \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^{\sin^2 \varphi} = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin \varphi|^3) d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} \left[\varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + \cos \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

13.2. Masscentrum

Låt D vara en kropp i \mathbb{R}^3 med variabel densitet $\rho(x, y, z)$. Kroppens **masscentrum (tyngdpunkt)** \mathbf{x}_D definieras som den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt med avseende på varje tänkt tyngdkraft, oavsett dess riktning. Tyngdpunkten för kroppen D beräknas med hjälp av trippelintegraler

$$\begin{cases} x_T = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ y_T = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ z_T = \frac{1}{m(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz, \end{cases} \quad \text{där } m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz \text{ är massan av kroppen } D$$

Exempel 13.4. Bestäm tyngdpunktens läge för kroppen $D : \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Vi antar att kroppen är gjord av ett homogent material.

Lösning. Observera att kroppen D är den åttonde del av enhetsklotet som ligger i den första oktanten. Låt ρ vara kroppens densitet: $\rho = \text{konst.}$ Då får vi för massan:

$$m(D) \iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \iiint_D dx \, dy \, dz = \rho \cdot \text{Vol}(D) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho = \frac{\pi\rho}{6}.$$

Av symmetriskäl är $x_D = y_D = z_D$, så att det återstår att bestämma exempelvis x_D . Vi har

$$x_T = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho \, dx \, dy \, dz = \frac{6}{\pi} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz.$$

Integralen i högerledet kan beräknas med hjälp av rymdpolära koordinater: vi har $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/2$, alltså

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \underbrace{r \sin \theta \cos \varphi}_x \cdot \underbrace{r^2 \sin \theta}_{\text{jacobian}} \, dr = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \\ &= 1 \cdot \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

varav tyngdpunktens läge är

$$\mathbf{x}_D = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right).$$

13.3. Multipelintegraler

Beteckningar:

$$\int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Ett viktigt partiellt fall:

$$\text{hypervolumen av } D = \mu(D) := \int_D 1 \, d\mathbf{x}.$$

Exempel 13.5. Bestäm hypervolumen av 4-dimensionella enhetsklotet.

Lösning. Kroppen ges av

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}$$

varav

$$\mu(D) = \iiint \int_D 1 \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \iint_{E_1} dx_1 dx_2 \iint_{E_r} dx_3 dx_4,$$

där $E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ är enhetsskiva i $x_1 x_2$ -planet och E_r är cirkelsskivan av radien

$$r = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

i $x_3 x_4$ -planet. Vi har för den inre integralen:

$$\iint_{E_r} dx_3 dx_4 = \text{Areal}(E_r) = \pi r^2 = \pi(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

varav

$$\mu(D) = \iint_{E_1} \pi(1 - x_1^2 - x_2^2) \, dx_1 dx_2 = \pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho \, d\rho = 2\pi^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Generaliserade dubbel- och trippelintegraler

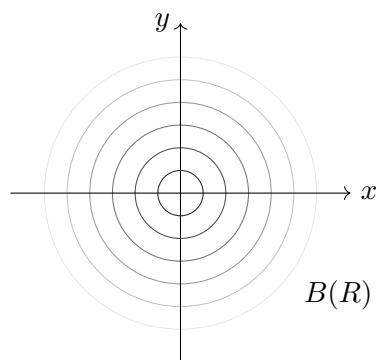
14.1. Inledande exempel

Vi har hittills definierat multipelintegraler av en *begränsad* funktion $f(\mathbf{x})$ över ett *begränsat* område i \mathbf{x} -rummet \mathbb{R}^n , $n = 2, 3, \dots$. Vi påminner att **enkelintegralen** $\int_a^b f(x) dx$ är generaliserad om

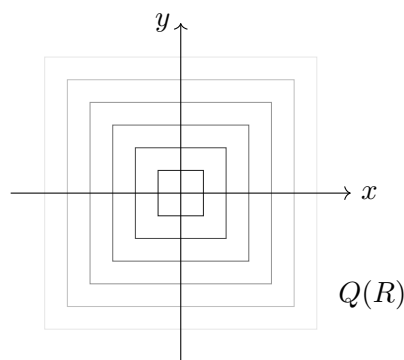
- antingen integranden $f(x)$ är obegränsad på i integrationsintervallet (a, b) ,
- eller integrationsintervallet (a, b) är obegränsad.

I både fallen definierar man motsvarande generaliserade integreler genom att med hjälp av ett gränsvärde successivt “fylla ut” (tömma ut) integrationsintervallet. För generaliserade multipelintegraler finns det oändligt många valmöjligheter att både avskära eventuella singulariteter och tömma ut ett integrationsområde.

Exempel 14.1. Betrakta $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Integranden är begränsad (≤ 1) men integrationsområde (\mathbb{R}^2) är obegränsad.



Uttömning med cirkelskivor



Uttömning med kvadrater

Som det första alternativet betraktar vi uttömning m.h.a. cirkelskivor $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$\iint_{B(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy = (\text{i polära koordinater}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \cdot (1 - e^{-R^2}),$$

vilket medför att

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Alternativt, kan vi tömma ut \mathbb{R}^2 är m.h.a. en kvadratisk svit: $Q(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < R\}$ (se figuren ovan):

$$\begin{aligned} \iint_{Q(R)} e^{-x^2-y^2} dx dy &= (\text{itererad integration}) = \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy = \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right)^2 \rightarrow (\sqrt{\pi})^2 = \pi, \quad \text{då } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Alltså ger både sätt det samma värde på den generaliserade integralen.

Allmänt, vi säger att slutna kvadrerbara mängder

$$D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots \subseteq D$$

är en **uttömmande svit** till D om för varje sluten kvadrerbar delmängd $D' \subset D$ gäller det att $D' \subset D_k$ för något k . Vi vill definiera generaliserad integral i två variabler i analogi med envariabelfallet via en uttömmande svit:

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} f(x, y) dx dy.$$

Men detta gränsvärde kan bero av hur vi väljer att fylla ut D med $\{D_k\}_{1 \leq k \leq \infty}$.

Exempel 14.2. Varnande exempel från boken: Persson-Böiers: ex. 19 s. 272:

$$\iint_D xy(2-xy)e^{-xy}, \quad D = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < 1\}.$$

Eftersom $f(x, y) := xy(2-xy)e^{-xy} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2ye^{-xy}) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy})$,

$$\underbrace{\int_0^\infty f(x, y) dx}_{\text{generaliserad enkelintegral}} = [x^2ye^{-xy}]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2ye^{-xy} = 0$$

så att en upprepad integration ger

$$\int_0^1 dy \int_0^\infty f(x, y) dx = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Å andra sidan, om vi först integrerar m.a.p. y ger det:

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^\infty [xy^2e^{-xy}]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\infty xe^{-x} dx = 1 \neq 0.$$

Alltså

$$\int_0^\infty dx \int_0^1 f(x, y) dy \neq \int_0^1 dy \int_0^\infty f(x, y) dx.$$

Definition 14.1. Antag att för en funktion f och en mängd D gäller att gränsvärdet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} f(x, y) dx dy = A$$

existerar (ändligt!) och är oberoende av vilken uttömmande svit $\{D_k\}_{1 \leq k \leq \infty}$ till D man väljer. Vi säger då att den **generaliserade integralen**

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

är **konvergent** med värdet A . En generaliserad integral kallas i stället **divergent** om gränsvärde saknas eller om olika sviter ger olika värden.

14.2. Positiv integrand

Nu antar vi att $D \subset \mathbb{R}^2$ är ett öppet område och $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion i D med

$$f(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in D.$$

Vi tillåter även att både D och f vara obegränsad.

Sats 23. Om $f(x, y) \geq 0$ i D då generaliserade integralen $\iint_D f(x, y) dx dy$ är konvergent om och endast om det finns en konstant $M > 0$ sådan att för varje kvadrerbar delmängd $D' \subset D$ gäller det att

$$\iint_{D'} f(x, y) dx dy \leq M.$$

Den **geometriska tolkningen**: volymen mellan D och grafen av f är ändlig.

I praktiken, kan man normalt använda följande sats: *Antag att den inre enkelintegralen (t.ex. med avseende på y) är konvergent för varje fixt x . Då är dubbelintegralen av f konvergent om och endast om den yttre enkelintegralen m.a.p. x är konvergent.*

Exempel 14.3. Avgör om integralen $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$, där D ges av $x > 0, y > 0$, konvergerar och bestäm i så fall värdet.

Lösning. Integralen är generaliserad genom att integrationsområdet är obegränsat. Integranden är positiv. Låt $D' \subset D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett godtyckligt begränsat område, d.v.s. det finns $R > 0$ så att $D' \subset B(R)$, cirkelskivan av radien R . Med hjälp av monotonicitetsprincipen:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy &\leq \iint_{B(R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = (\text{polära koordinater}) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho = \pi \left(1 - \frac{1}{1+R^2}\right) < \frac{\pi}{2} =: M, \end{aligned}$$

integralen är alltså konvergent.

För att beräkna värdet använder vi uttömning med kvartscirkelskivor: $K(R) = \{x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < R^2\}$:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{K(R)} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = (\text{polära koordinater}) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} d\rho = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{1+R^2}\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sats 24 (Jämförelsekriterium). Låt $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$, $(x, y) \in D$. Då

$$\begin{aligned} \iint_D g(x, y) dx dy \quad \text{är konvergent} &\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{är konvergent,} \\ \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{är divergent} &\Rightarrow \iint_D g(x, y) dx dy \quad \text{är divergent} \end{aligned}$$

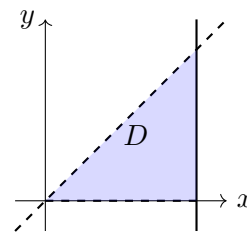
Exempel 14.4. Integralen $\iint_D e^{-2x^2-10y^2} dx dy$ är konvergent (varför?)

Det är också tillåtet att byta variabler i en generaliserad integral (med positiv integrand) och på så sätt överföra undersökningen till ett annat koordinatsystem, där räkningarna eventuellt är lättare att genomföra.

Exempel 14.5. Undersök konvergensen av $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ där $D = \{(x, y) : 0 \leq y < x \leq 1\}$.

Lösning. Integralen är generaliserad eftersom integranden växer obegränsat vid begränsningslinjen $y = x$. Integranden är positiv, så vi provar att direkt använda itererad integration:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} dy = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-2\sqrt{x-y} \right]_0^{x-\varepsilon} dx = \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Integralen är konvergent med värde $\frac{4}{3}$.

14.3. Integrand med växlande tecken

Om integranden växlar tecken så blir situationen mer komplicerad. Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara ett öppet område och $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion i D med växlande tecken. Definierar

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y) & \text{då } f(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) > 0 \end{cases},$$

så att

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

$$\iint_D f^+(x, y) dx dy \quad \text{och} \quad \iint_D f^-(x, y) dx dy \quad \text{är konvergenta} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_D |f(x, y)| dx dy \quad \text{är konvergent.}$$

Definition. En generaliserad integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ är **absolutkonvergent** om $\iint_D |f(x, y)| dx dy$ är konvergent.

Sats 25. $\iint_D f(x, y) dx dy$ är konvergent $\Leftrightarrow \iint_D |f(x, y)| dx dy$ är konvergent.

Vi demonstrerar metoden med en trippelintegral.

Exempel 14.6. Låt D ges av $x^2 + y^2 < z^2$, $0 < z < 2\pi$. Avgör om integralen $\iiint_D \frac{\sin z}{z^2} dx dy dz$ är konvergent.

Lösning. Integralen skiftar tecken i området. Vi har

$$\left| \frac{\sin z}{z^2} \right| \leq \frac{1}{z^2} \quad \text{i } D.$$

Singularitet ligger i konens spets $(0, 0, 0)$. Med en ε -avskärning $D_\varepsilon = \{x^2 + y^2 < z^2, \varepsilon < z < 2\pi\}$ får vi trippelintegralen

$$\iiint_{D_\varepsilon} \frac{1}{z^2} dx dy dz = \int_\varepsilon^{2\pi} dz \iint_{E_z} \frac{1}{z^2} dx dy = \int_\varepsilon^{2\pi} \frac{1}{z^2} \cdot \text{Arean}(E_z) dz = \int_\varepsilon^{2\pi} \pi dz < 2\pi^2$$

alltså absolut konvergent \Rightarrow konvergent.