Tredimensionell kompakt optimering med flera bivillkor: ett längre exempel

$$\boxed{\text{Bestäm största och minsta värdet av } xyz \text{ då } x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z^2 \le x^2+y^2 \text{ och } 3x \ge 1.}$$

Mängden är en sluten delmängd av enhetsklotet och är därmed kompakt, och funktionen f är kontinuerlig där, så f antar ett största och ett minsta värde på mängden.

Vi inför beteckningar för målfunktionen och bivillkorsfunktionerna samt beräknar gradienter:

Målfunktion:	$f(x,y,z) = xyz$	$\nabla f = (yz, xz, xy)$
Bivillkor 1:	$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \le 1$	$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$
Bivillkor 2:	$h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 \ge 0$	$\nabla h = (2x, 2y, -2z)$
Bivillkor 3:	$k(x,y,z) = 3x \ge 1$	$\nabla k = (3, 0, 0)$

Mängden bestäms alltså av de tre olikheterna $g \le 1$, $h \ge 0$ och $k \ge 1$, och var och en av dessa kan antingen vara en sträng olikhet ($<$ eller $>$) eller en likhet ($=$); ett bivillkor sägs vara *passivt* i det förra fallet och *aktivt* i det senare.

Vi jagar nu kandidater, alltså punkter där maximum eller minimum kan antas, genom att låta fler och fler bivillkor bli aktiva. Lägg speciellt märke till att för varje aktivt bivillkor skall motsvarande gradient – tillsammans med målfunktionens gradient ∇f – ingå i undersökningen.

- $\dim 3$ (inget aktivt bivillkor): kroppen $g < 1$, $h > 0$ och $k > 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f = \mathbf{0} \\ g < 1,\ h > 0,\ k > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = 0,\ xz = 0,\ xy = 0 \\ g < 1,\ h > 0,\ k > 1 \end{cases}$$

  Eftersom $k > 1 \Leftrightarrow x > 1/3$ följer $y = 0$ och $z = 0$. De punkter $(x, 0, 0)$ som uppfyller alla krav är därmed de där $x^2 < 1$, $x^2 > 0$ och $3x > 1$, d.v.s. de där $1/3 < x < 1$.

  $\because$ Kandidater $f(x, 0, 0) = 0$, $1/3 < x < 1$.

- $\dim 2$ (ett aktivt bivillkor i taget): består av följande delar:

  $*$ Den del av ytan $g = 1$ (sfär) där $h > 0$ och $k > 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g = 1,\ h > 0,\ k > 1 \end{cases}$$

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow (yz, xz, xy) \parallel (2x, 2y, 2z) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} yz & xz \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} yz & xy \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 0 \text{ och } \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 0,$$

  d.v.s. $z(y^2 - x^2) = 0$, $y(z^2 - x^2) = 0$ och $x(z^2 - y^2) = 0$. Eftersom $x > 1/3$ får vi $z^2 = y^2$, som dels ger möjligheten $y = z = 0$, dels möjligheten $x^2 = y^2 = z^2$. Det första fallet insatt i $g = 1$ ger $x^2 = 1$ och därmed punkterna $(\pm 1, 0, 0)$, det andra ger $3x^2 = 1$ och därmed punkterna $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ (8 punkter). Endast punkterna $(1, 0, 0)$ och $(1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ (4 punkter) uppfyller de passiva bivillkoren $h > 0$, $k > 1$.

  $\because$ Kandidater $f(1, 0, 0) = 0$,

$$f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/9,$$
$$f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/9.$$

  $*$ Den del av ytan $h = 0$ (dubbelkon) där $g < 1$ och $k > 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla h \\ h = 0,\ g < 1,\ k > 1 \end{cases}$$

$$\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (yz, xz, xy) \parallel (2x, 2y, -2z) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} yz & xz \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy \\ 2x & -2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ 2y & -2z \end{vmatrix} = 0,$$

  d.v.s. $z(y^2 - x^2) = 0$, $y(z^2 + x^2) = 0$ och $x(z^2 + y^2) = 0$. Även här är $3x > 1$, så $y^2 + z^2 = 0$, och därmed $y = z = 0$. Insättning i $h = 0$ ger $x^2 = 0$, vilket dock strider mot att $x > 1/3$.

  $\because$ Kandidater saknas.

* Den del av ytan $k = 1$ (planet $x = 1/3$) där $g < 1$ och $h > 0$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla k \\ k = 1,\ g < 1,\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (yz, xz, xy) \parallel (3,0,0) \\ k = 1,\ g < 1,\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 0,\ xy = 0 \\ x = 1/3,\ g < 1,\ h > 0 \end{cases}$$

Alltså är $y = z = 0$, vilket ger punkten $(1/3, 0, 0)$, som uppfyller alla krav.
$\because$ Kandidat $f(1/3, 0, 0) = 0$.

- dim 1 (två aktiva bivillkor i taget): består också av tre delar:

* Den del av kurvan $g = 1$, $h = 0$ där $k > 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ linjärt beroende} \quad (') \\ g = 1,\ h = 0,\ k > 1 \end{cases}$$

$$(') \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 0 & 0 & 4z \\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} 4z \begin{vmatrix} yz & xz \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8z^2(x^2 - y^2).$$

$z = 0$ insatt i $g = 1$ ger $x^2 + y^2 = 1$ och insatt i $h = 0$ ger $x^2 + y^2 = 0$, orimligt. $x^2 = y^2$ ger å andra sidan $2x^2 + z^2 = 1$ och $z^2 = 2x^2$, alltså $4x^2 = 1$ och $z^2 = 1/2$, d.v.s. $x^2 = y^2 = 1/4$ och $z^2 = 1/2$. Kravet $k > 1$, d.v.s. $x > 1/3$, begränsar urvalet.
$\because$ Kandidater $f(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}) = f(1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}/8$,
$f(1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}) = f(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/8$.

* Den del av kurvan $g = 1$, $k = 1$ där $h > 0$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla k \text{ linjärt beroende} \quad ('') \\ g = 1,\ k = 1,\ h > 0 \end{cases}$$

$('') \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6x(z^2 - y^2)$. Villkoret $k = 1$, d.v.s. $x = 1/3$, ger $y^2 = z^2$.
$g = 1$ ger $1/9 + 2y^2 = 1$, alltså $y^2 = z^2 = 4/9$. Villkoret $h > 0$ är också uppfyllt.
$\because$ Kandidater $f(1/3, 2/3, 2/3) = f(1/3, -2/3, -2/3) = 4/27$,
$f(1/3, 2/3, -2/3) = f(1/3, -2/3, 2/3) = -4/27$.

* Den del av kurvan $h = 0$, $k = 1$ där $g < 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla h, \nabla k \text{ linjärt beroende} \quad (''') \\ h = 0,\ k = 1,\ g < 1 \end{cases}$$

$(''') \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & -2z \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6x(y^2 + z^2)$. Eftersom $x = 1/3$ är alltså $y = z = 0$, så vi får punkten $(1/3, 0, 0)$, som dock inte uppfyller villkoret $h = 0$.
$\because$ Kandidater saknas.

- dim 0 (tre aktiva bivillkor): punkterna där $g = 1$, $h = 0$ och $k = 1$. Kandidater fås ur

$$\begin{cases} (\nabla f, \nabla g, \nabla h, \nabla k \text{ linjärt beroende}) \\ g = 1,\ h = 0,\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow g = 1,\ h = 0,\ k = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3},\ y^2 = \frac{7}{18},\ z^2 = \frac{1}{2}$$

(som bekant är fyra vektorer i $\mathbf{R}^3$ alltid linjärt beroende)
$\because$ Kandidater $f(1/3, \sqrt{7/18}, 1/\sqrt{2}) = f(1/3, -\sqrt{7/18}, -1/\sqrt{2}) = \sqrt{7}/18$,
$f(1/3, \sqrt{7/18}, -1/\sqrt{2}) = f(1/3, -\sqrt{7/18}, 1/\sqrt{2}) = -\sqrt{7}/18$.

Jämförelser ger slutligen **största värdet** $\sqrt{3}/9$ i $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ och $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ och **minsta värdet** $-\sqrt{3}/9$ i $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ och $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Lars Alexandersson okt 2006