Lösningsförslag. Tenta 2023/08/16, TATA43, 9GMA08.

1) $f(x,y) = \frac{2x}{y} + \frac{4}{x} - y$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{y} - \frac{4}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} - 1$. Ekvationen $f'_y = 0$ ger $x = -y^2/2$, insatt i $f'_x = 0$ ger $y^3 = 8$, d.v.s. $y = 2$ och $x = -2$. Vi har en stationär punkt $(-2;2)$. Andra derivatorna av $f(x,y)$ är $f''_{xx} = \frac{8}{x^3}$; $f''_{xy} = -\frac{2}{y^2}$; $f''_{yy} = \frac{4x}{y^3}$, och i punkten $(-2,2)$ har de värdena

$$f''_{xx}(-2,2) = -1, \quad f''_{xy}(-2,2) = -\frac{1}{2}, \quad f''_{yy}(-2,2) = -1,$$

alltså den kvadratiska formen $Q_{(-2,2)}(h,k)$ blir:

$$Q_{(-2,2)}(h,k) = -h^2 - hk - k^2 = -\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{3k^2}{4}.$$

Eftersom den kvadratiska formen är negativt definit är punkten $(-2,2)$ ett lokalt maximum.

Svar: $(-2,2)$ är en lokal maximipunkt.

---

2) a) Låt $F(x,y,z) = x^2 + x - 6y + z^3x$. Då kan vi betrakta ytan $x^2 + x - 6y + z^3x = 2$ som nivåytan $F(x,y,z) = 2$. Vi vet att gradienten $\nabla F(x,y,z)$ är vinkelrät mot ytan i varje punkt på ytan och i vårt fall är vi intresserade av punkten $(2,1,1)$. Vi har

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 1 + z^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -6, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2x$$

så blir $\nabla F(2,1,1) = (6;-6;6)$. Vi kan välja en normal som $\bar{n} = (1,-1,1)$ och normallinjens ekvation på parameterform blir L: $(x,y,z) = (2,1,1) + t(1,-1,1) = (2+t, 1-t, 1+t)$.

b) Substitution av linjens (L) ekvation i $x + 2y + z = 5$ ger:

$$(2+t) + 2(1-t) + (1+t) = 5 + 0\cdot t = 5 \leftarrow \text{ok!}$$

$\Rightarrow$ normallinjen ligger i planet.

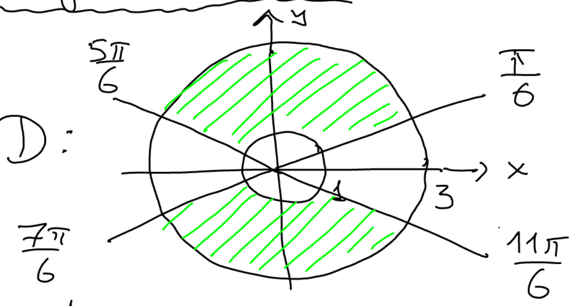
Svar a) $(x,y,z) = (2+t, 1-t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$

b) ja

③ $D = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 3y^2 \ge x^2\}$

cirkelring $1 \le \rho^2 \le 9$ $\qquad$ $\Longleftrightarrow$ $|y| \ge \frac{1}{\sqrt{3}}|x|$

Motsvarar bilden:



$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

(lutning $= \tan\alpha$)

I planpolära koordinater ges D av:

$D : 1 \le \rho \le 3, \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$ och $\frac{7\pi}{6} \le \varphi \le \frac{11\pi}{6}$

jakobianen: $\left|\frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)}\right| = \rho$.

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int_1^3 e^{\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\varphi + \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\left(\int_1^3 e^{\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(e^9 - e)\cdot\frac{4\pi}{6}\cdot 2 = \frac{2\pi}{3}(e^9 - e)$$

Svar: $\frac{2\pi}{3}(e^9 - e) = \frac{2\pi}{3}(e^8 - 1)e$.

---

④ $u = \frac{x}{y}$, $v = y$, kedjeregeln ger

$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u \cdot \frac{1}{y}$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -\frac{x}{y^2} z'_u + z'_v$

Insättning i PDE $xz'_x + yz'_y = 1 + x$ ger

$x(z'_u \frac{1}{y}) + y(-\frac{x}{y^2} z'_u + z'_v) = 1 + x \iff z'_v = \frac{1+x}{y} = \frac{1}{v} + u$,

för $u, v > 0$, som integrerad ger $z = uv + \ln v + g(u)$,

eller $z = x + \ln y + g(\frac{x}{y})$, där $g(t)$ är en C^1-funktion.

Bivillkoret ger nu $1 = z(1,y) = 1 + \ln y + g(\frac{1}{y}) \iff$

$\iff g(1/y) = -\ln y = \ln 1/y \iff g(t) = \ln t$, alltså

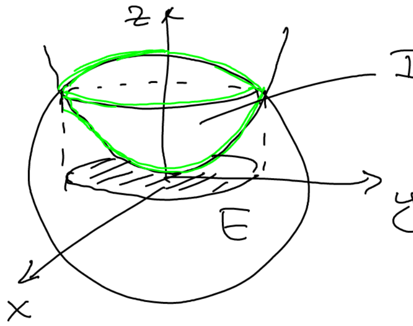
$$z(x,y) = x + \ln y + \ln\frac{x}{y} = x + \ln x$$

Svar $z(x,y) = x + \ln x$.

---

⑤ $z = x^2 + y^2 \Rightarrow$ $z \ge 0$, d.v.s. $z^2 = 20 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 20$

$\Rightarrow$ ett klot av radien $\sqrt{20}$ träffar paraboloiden $z = x^2 + y^2$:



$D: \quad x^2+y^2 \le z \le \sqrt{20-x^2-y^2}$

Låt $x^2+y^2=t \Rightarrow t \ge 0$ och

$t=\sqrt{20-t} \Rightarrow t^2 = 20-t \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = 4$ eller $t_2=-5$ (falsk).

Så ges D av: $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{20-x^2-y^2}$ över cirkelskivan

E: $\{(x,y): x^2+y^2 \le 4\}$, vilket ger (med stavar i z-led)

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iint_E dx\,dy\left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} z\,dz\right) = \iint_E \frac{1}{2}\left(20-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy =$$

$= \Big/$ planpolära koordinater $\quad 0\le\varphi\le 2\pi, \; 0\le\rho\le 2 \Big/ = \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \frac{1}{2}(20-\rho^2-\rho^4)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi =$

$= 2\pi \cdot \frac{38}{3}$

Svar: $\frac{76\pi}{3}$.

---

(6) a) Sätt $F(x,y,z) = x^2+2xz+y^3-yz+z^4$, då är F en C^1-funktion för alla $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (som ett polynom), $F(1,1,1)=4$, och $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = (2x-y+4z^3)\big|_{(1,1,1)} = 5 \ne 0 \Rightarrow$ följer av implicita funktionsatsen att $F(x,y,z)=4$ i en omgivning av $(1,1,1)$ implicit definierar en C^1-funktion $z=z(x,y)$.

b) Vi kan derivera $z(x,y)$ implicit:

- $2x+2z+2xz'_x - yz'_x + 4z^3z'_x = 0$, $\quad z'_x(1,1) = -\frac{4}{5}$
- $2xz'_y + 3y^2 - yz'_y - z + 4z^3z'_y = 0$, $\quad z'_y(1,1) = -\frac{2}{5}$.

Eftersom funktionen $z(x,y)$ växer snabbast i gradientens riktning, så sökta riktningen är $\frac{\nabla z}{|\nabla z|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$

Svar a) se ovan

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$

⑦ $f(x,y) = \dfrac{xy}{4+x^4+y^4}$, $D = \{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

Området D är obegränsat slutet $\Rightarrow$ icke kompakt.

- Observera att $f \geq 0$ i D och $f(0,0) = f(x,0) = f(0,y) = 0$

$\Rightarrow$ 0 är det minsta värdet av $f(x,y)$ per definition.

- Observera också att

$\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty} f(x,y) = 0$ eftersom: $x^4+y^4 = \dfrac{(x^2+y^2)^2 + (x^2-y^2)^2}{2} \geq$

$\geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2}\rho^4$

$\Rightarrow 0 \leq \left| \dfrac{xy}{4+x^4+y^4} \right| \leq \dfrac{\rho^2}{4+\frac{1}{2}\rho^4} \to 0$ då $\rho \to \infty$.

- Observera vidare att

$$f'_x = \frac{y(4+x^4+y^4) - 4x^3 \cdot xy}{(4+x^4+y^4)^2} = \frac{y(4+y^4-3x^4)}{(4+x^4+y^4)^2}$$

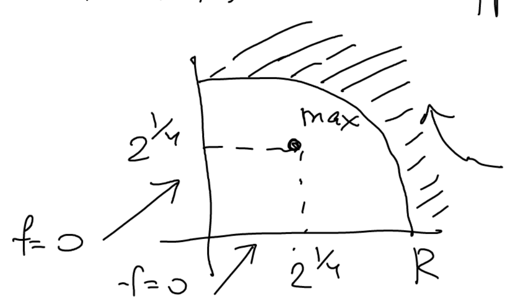
$$f'_y = \ \ldots\ldots = \frac{x(4+x^4-3y^4)}{(4+x^4+y^4)^2}$$

alltså $\nabla f(x,y) = (0,0)$ för $x>0, y>0$ har en lösning:

$$\begin{cases} x^4 - 3y^4 = -4 \\ -3x^4 + y^4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 2 \\ y^4 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (2^{1/4}, 2^{1/4}).$$

Det betyder att $f(x,y)$ har bara en stationär punkt i $D' = \{x>0, y>0\}$.

- Eftersom $\lim\limits_{\rho \to \infty} f(x,y) = 0$ och $f(x,y) \geq 0$ i D, så finns det $R > 2$ sådan att $0 \leq f(x,y) < \varepsilon = f(2^{1/4}, 2^{1/4}) = \frac{\sqrt{2}}{8}$ för alla (x,y) som uppfyller $\sqrt{x^2+y^2} > R$; se bilden:



här gäller att $0 \leq f(x,y) < \frac{\sqrt{2}}{8}$

Betraktar $D_R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$ = en kompakt $\Rightarrow$ existerar största värde av $f(x,y)$ på D_R. Eftersom $f(x,y) < \frac{\sqrt{2}}{8}$ på randen och $f(2^{1/4}, 2^{1/4}) = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $(2^{1/4}, 2^{1/4})$ är enda stationära inre punkten i D_R, så drar vi slutsats att ett maximum måste uppnås just i $(2^{1/4}, 2^{1/4})$.

Svar
- $f(x,0) = f(0,y) = 0$ är minsta värdet
- $f(2^{1/4}, 2^{1/4}) = \frac{\sqrt{2}}{8}$ är största värdet.