

Tentamen i 9GMA08 Matematik: Flervariabelanalys

2023-10-26 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Beräkna gränsvärdet, eller visa att det inte existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

(1p)

- (b) Låt $f(x, y) = x + 2x^2 - y^3$. Bestäm riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(1, -1)$ där $\bar{v} = (2, 1)$ samt tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(1, -1, 4)$. (2p)

2. (a) Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till $3z'_x - z'_y = 0$. (**Tips:** använd variabelbytet $u = x + 3y, v = y$). (2p)

- (b) Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ till $z''_{xx} = 1$. (1p)

3. (a) Avgör om $f(x, y) = 1 + x - x^2 - y^2$ har en lokal extrempunkt i $(0, 0)$, och ange i så fall vilken typ.

- (b) Avgör om $f(x, y) = 1 + 2x^2 + xy + y^2 + y^3 - x^4$ har en lokal extrempunkt i $(0, 0)$, och ange i så fall vilken typ.

- (c) Avgör om $f(x, y) = -6 + 8y + x^2 - 4y^2 - x^3 + x^3y$ har en lokal extrempunkt i $(0, 1)$, och ange i så fall vilken typ.

4. Beräkna integralen $\iint_D (x + 2y) dx dy$, där

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, -x \leq y \leq x\}.$$

5. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2y$, på den del av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$ där $x \geq 1$.

6. Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara området som ges av olikheterna $0 < x^3 < y < x^2$ och $z > 4$. Beräkna integralen (eller visa divergens) $\iiint_D \frac{1}{x^2 z^2} dx dy dz$.

7. Bestäm alla värden på konstanten d sådana att planet $x + 2y + z = d$ tangerar parameterytan given av

$$\begin{cases} x = st^2 - s - 4t \\ y = s - t^2 \\ z = s^2 + 4t \end{cases} \quad -1 < s < 1, -1 < t < 1$$

i någon punkt. Bestäm även för dessa värden på d i vilken punkt (eller vilka punkter) som planet tangerar ytan.