Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: 9GAM08
Provkod: STN1

Tentamen i 9GMA08 Matematik: Flervariabelanalys

2024-01-02 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y, z) = (x + xy + yz)e^z$. Har f någon lokal extrempunkt?

2. (a) Tangentplan i $(0, 0, 0)$ till ytan $z = g(x, y)$ har ekvationen $x + y + z = 0$. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = (2 + g(x, y))^2$ i den punkt där $x = y = 0$. (2p)

   (b) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom i origo till $f(x, y) = (1 + 2x)^{1-y}$. (1p)

3. (a) Bestäm alla lösningar $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till $z'_x = yz$. (1p)

   (b) Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar z för $x, y > 0$ till $2xyz'_x - (2x + y^2)z'_y = 0$ under bivillkoret $z(x, 0) = x$. (**Tips:** använd variabelbytet $u = x^2 + xy^2, v = y$). (2p)

4. Visa att ekvationsystemet
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = -1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{cases}$$
i en omgivning av $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ definierar en C^1-kurva. Bestäm ekvationen för tangenten i $(1, 1, 1)$ till kurvan.

5. Beräkna integralen
$$\iiint_D \frac{z}{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
där $D \subset \mathbb{R}^3$ är området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Beräkna integralen (eller visa divergens) $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{2x^2 + y^2}{1 + (2x^2 + y^2)^4} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

7. Visa att funktionen $f(x, y) = x^2 y e^{-x^2 - 2y^2}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, har ett största och ett minsta värdet och bestämm dessa värden.