Lösningsförslag. TENTA 2022/06/02 TATA43 – 9GMA08

① De stationära punkterna fås ur $f'_x = 3x^2+3y=0$ och $f'_y = -3y^2+3x=0$. Den första ekvationen ger $y=-x^2$, som insatt i den andra ger $3x-3x^4 = 3x(1-x^3)=0$, alltså $x=0$ eller $x=1$, resp. $y=0$ eller -1.
De stationära punkterna är således $(0,0)$ och $(1,-1)$.
Andra derivatorna blir $f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=3$, $f''_{yy}=-6y$.

- Punkten $(0,0)$:

$$Q_{(0,0)}(h,k) = (h\ k)\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = 6hk$$

är indefinit eftersom t.ex. $Q_{(0,0)}(1,1)=6$, medan $Q_{(0,0)}(1,-1)=-6$. Så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för $f(x,y)$.

- Punkten $(1,-1)$:

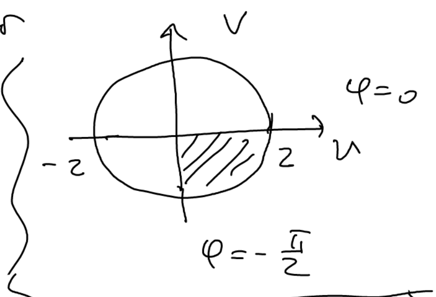
$$Q_{(1,-1)}(h,k) = (h\ k)\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = 6(h^2+hk+k^2) = 6\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right)$$

som är positivt definit eftersom $Q(h,k)\geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k)=0$ endast om $h+\frac{k}{2}=0$ och $k=0$, d.v.s. endast om $(h,k)=(0,0)$.
Således är punkten $(1,-1)$ en lokal minimipunkt för f.

Svar: $(1,-1)$ en lokal minimipunkt för f. Lokala maximipunkter saknas.

---

② Observera att $x\geq 1$, $y\leq 0$ ger $x-y\geq 1>0$, alltså svaret måste bli positivt.
Variabelbytet $u=x-1$, $v=2y$ ger $\begin{cases} u\geq 0,\ v\leq 0 \\ u^2+v^2\leq 4\end{cases} =: E$
ett nytt område E. Planpolära koordinater i (uv)-planet ger därefter



$$\iint_D (x-y)\,dx\,dy = \Big/ \text{jakobian } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_E \left(u+1-\frac{v}{2}\right)du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_0^2 \left(\rho\cos\varphi + 1 - \rho\frac{\sin\varphi}{2}\right)\rho\,d\rho\right)d\varphi =$$

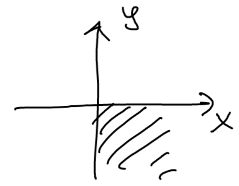
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{8}{3}\cos\varphi + 2 - \frac{4}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi+4}{2}$$

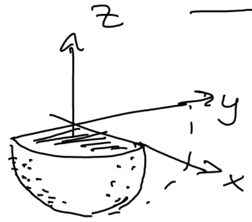
$\boxed{\text{Svar: } \frac{\pi+4}{2}}$

③ Variabelbytet
(OBS: $y_T < 0$)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \frac{1}{2} r\sin\varphi\sin\theta \\ z = \frac{1}{3} r\cos\theta \end{cases}$$ ger $\left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}\right| = \frac{1}{6} r^2 \sin\theta$

och $\boxed{-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \;,\; \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \;,\; 0 \le r \le 3}$





$$\iiint_D dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^3 \frac{1}{6} r^2 \sin\theta \, dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\left[\frac{r^3}{18}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{27}{18} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\iiint_D y\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^2 \frac{1}{6} r^2\sin\theta\cdot\frac{1}{2} r\sin\varphi\sin\theta \, dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \Big[-\cos\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cdot\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\left[\frac{r^4}{48}\right]_0^3 = (-1)\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{81}{48} = -\frac{27\pi}{64}$$

$$y_T = -\frac{27\pi}{64}\cdot\frac{4}{3\pi} = -\frac{9}{16}$$

Svar: $y_T = -\frac{9}{16}$

---

④ Målfunktionen $f(x,y,z) = x + 2y + z$ är kontinuerlig, mängden där $g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 20$ och $h(x,y,z) = x + 2y \ge 0$ är begränsad och sluten, alltså största och minsta värde existerar på denna mängd. Vi har $\nabla f = (1,2,1)$, $\nabla g = (4x, 2y, 4z)$ och $\nabla h = (1,2,0)$.

Kandidatpunkt:

- (3D) Inre punkter saknas.
- (2D) Kandidater på ytan $g = 20$ och $h > 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. $\nabla f \times \nabla g = 0$:

$$0 = \nabla f \times \nabla g = (8z - 2y;\ 4x - 4z;\ 2y - 8x) \iff \begin{cases} x = z \\ y = 4x \end{cases},$$

Insättning i $g = 20$ ger $20x^2 = 20$, $x = \pm 1$. Det första alternativet $x = -1$ ger $(-1,-4,-1)$ med $h(-1,-4,-1) = -9 < 0$, uppfyller inte kravet $h > 0$. Det andra alternativet ger punkten $(1,4,1)$ med $h = 9 > 0$ och kandidaten blir

$$f(1,4,1) = 10.$$

- (1D) Kandidaten i kurvan $g=20$ och $h=0$ finns där $\nabla f, \nabla g$ och ∇h är linjärt beroende, d.v.s där determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4x & 2y & 4y \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 4x.$$

Insättning i $h=0$ ger $x=-2y$, alltså $x=y=0$. Videre $g=20$ ger $2z^2=20$, $z=\pm\sqrt{10}$. Vi har två kandidater här: $f(0,0,\sqrt{10}) = \sqrt{10}$, $f(0,0,-\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$.

Optimering ger svar:

<u>Svar:</u> $f_{max} = f(1,4,1) = 10$, $f_{min} = f(0,0,-\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$

---

(5) a) Låt $F(x,y,z) = 2e^{x+y+z} + xyz$. Eftersom $F \in C^1$, $F(1,1,-2)=0$ och $F'_z = 2e^{x+y+z} + xy = 3 \neq 0$ i punkten $(1,1,-2)$, så definierar ekvationen $F(x,y,z)=0$ enligt implicita funktionssatsen en C^1-funktion $z(x,y)$ i en omgivning till $(1,1,-2)$.

b) Per definition är $z(1,1)=-2$, och Implicit derivering ger

$$(2e^{x+y+z} + yz) + (2e^{x+y+z} + xy)z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{2e^{x+y+z} + yz}{2e^{x+y+z} + xy}$$

$$(2e^{x+y+z} + xz) + (2e^{x+y+z} + xy)z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{2e^{x+y+z} + xz}{2e^{x+y+z} + xy}$$

och $z'_x(1,1) = 0$, $z'_y(1,1) = 0$.

c) Eftersom $z'_x(1,1) = z'_y(1,1) = 0$, $(1,1)$ är en stationär punkt av $z(x,y)$. Andraderivatorna fås ut ur en upprepade derivering (obs. att $z'_x(1,1) = z'_y(1,1) = 0$!):

$$z''_{xx}(1,1) = \frac{-\left(2e^{x+y+z}(1+z'_x(1,1)) + yz'_x(1,1)\right)(2e^{x+y+z} + xy) + (2e^{x+y+z} + yz)\left(2e^{x+y+z}(z'_x(1,1)+1) + y\right)}{(2e^{x+y+z} + xy)^2}$$

$$= \frac{-(2)\cdot 3 + 0}{3^2} = -\frac{2}{3}$$

och analogt:

$z''_{xy}(1,1) = 0$, $z''_{yy}(1,1) = -\frac{2}{3}$, alltså ger den kvadratiska formen $Q_{(1,1)}(h,k) = -\frac{2}{3}(h^2+k^2)$ negativt definit, så har $z(x,y)$ lokalt maximum i $(1,1)$

Svar: Se ovan.

---

(6) $u = xy$ och $v = y$ ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u$

$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u + z'_v$.

Vidare:

$$z''_{xx} = y(z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y z'_u)'_y = z'_u + y(z'_u)'_y = z'_u + y(x z''_{uu} + z''_{uv}) =$$

$$= z'_u + yx z''_{uu} + y z''_{uv}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling

$$xy(y^2 z''_{uu}) - y^2(z'_u + yx z''_{uu} + y z''_{uv}) + (y+y^2) z'_u y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -y^3 z''_{uv} + y^3 z'_u = 0 \quad \underset{\text{(p.g.a. } y>0)}{\Leftrightarrow} \quad z''_{uv} = z'_u$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}(z'_v - z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'_v - z = h(v)$$ för någon C^1-funktion

$h(v)$. Med hjälp av integrerande faktor:

$$(e^{-v} z)'_v = e^{-v} h(v) = g(v),$$ en ny C^1-funktion av v.

$$\Leftrightarrow \quad e^{-v} z = G(v) + H(u) \Leftrightarrow z = e^{v}(G(v) + H(u)), \quad G, H \in C^2.$$

$$\Leftrightarrow \quad z(x,y) = e^{y}(G(y) + H(xy)).$$

Bivillkoret ger $0 = z(x,x) = e^{y}(G(x) + H(x^2))$, d.v.s

$G(x) = -H(x^2)$ alltså

Svar: $z(x,y) = e^{y}(H(xy) - H(x^2))$, där H är en C^2-funktion.

---

⑦

a) $$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^3} - 0}{h} = 1$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-k^4}{k^3} - 0}{k} = -1$$

b) $$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x+y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2}$$

Observera att $x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \geq -\frac{x^2+y^2}{2}$,

alltså $x^2+xy+y^2 \geq (x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$

[* Alternativt, den kvadratiska formen

$$x^2+xy+y^2 = (x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \lambda_{min}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

har egenvärden $(\lambda-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, alltså]

Detta ger

$$|f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)| = \frac{|x-y|\cdot(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2} \leq \frac{|x-y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} = 2|x-y|$$

eftersom $|x-y| = \rho\,|\cos\varphi - \sin\varphi| \leq 2\rho$, så gäller det att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-f(0,0)| \leq \lim_{\rho\to 0} 2\rho = 0.$$

d.v.s. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, vilket betyder att

$f(x,y)$ <u>är</u> kontinuerlig i $(0,0)$.

<u>Svar</u> a) $f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = -1$, b) se ovan.