Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-01-09

1. Integration av den första ekvationen $f'_x(x,y,z) = 2xze^z - y$ ger $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + g(y,z)$. Insättning av detta i den andra ekvationen $f'_z(x,y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$ ger $x^2(e^z + ze^z) + g'_z(y,z) = x^2e^z + zx^2e^z + ze^y$, dvs. $g'_z(y,z) = ze^y$. Integration av detta ger $g(y,z) = \frac{1}{2}z^2e^y + h(y)$. Därmed vet vi att
$$f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \tfrac{1}{2}z^2e^y + h(y).$$
Det sista villkoret $f(1,y,0) = y$ ger nu $0 - y + 0 + h(y) = y$, alltså $h(y) = 2y$.

   Svar: $f(x,y,z) = x^2ze^z - xy + \frac{1}{2}z^2e^y + 2y$.

2. Rymdpolära koordinater ger
$$\begin{aligned}
&\iiint_D \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz \\
&= \iiint_{\substack{1\le r\le 3\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \frac{r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta}{r^2}\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^3 \Big[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\pi/2} \Big[-\cos\varphi\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{26}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$
Svar: $13\sqrt{2}/9$.

3. De två bivillkoren $g(x,y) = 2x^2 + y^2 \le 1$ och $h(x,y) = x \le 0$ bestämmer en sluten (fylld) halvellips – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1-2x, -2y)$, $\nabla g = (4x, 2y)$ och $\nabla h = (1,0)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater i ytan $g < 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f = 0$, d.v.s. där $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$, som dock ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
   - Kandidater på ellipskurvan $g = 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där
$$0 = \begin{vmatrix} 1-2x & -2y \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = (1+2x)2y,$$
alltså där $x = -\frac{1}{2}$ eller $y = 0$. Insättning av $x = -\frac{1}{2}$ i $g = 1$ ger $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, som efter kontroll mot $h < 0$ ger kandidaterna $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$. Insättning av $y = 0$ i $g = 1$ ger efter kontroll mot $h < 0$ kandidaten $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{2}(5-\sqrt{2})$.
   - Kandidater på sträckan $h = 0$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $y = 0$, som med $h = 0$ och efter kontroll mot $g < 1$ ger kandidaten $f(0,0) = 3$.
   - Hörnpunkterna $g = 1$, $h = 0$ ger kandidaterna $f(0,1) = f(0,-1) = 2$.

   Notera slutligen att $\frac{1}{2}(5-\sqrt{2}) > \frac{1}{2}(5-\frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$.

   Svar: $f_{\max} = f(0,0) = 3$, $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$.

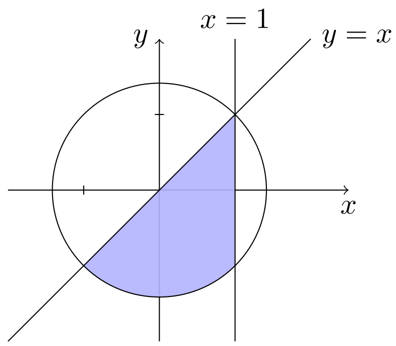
4. Svaret måste uppenbart ha formen $3x - 2y + 2z = D$. Kalla den sökta tangeringspunkten för (a, b, c); när vi har hittat den kan vi sedan beräkna $D = 3a - 2b + 2c$. Ytans normalvektor i den punkten ska vara parallell med normalvektorn för det givna planet $3x - 2y + 2z = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ -2c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Punkten måste också uppfylla ytans ekvation, $a^2 + b^2 - c^2 = 1$. Insättning av $a = 3k$, $b = -2k$, $c = -2k$ i detta ger $(9 + 4 - 4)k^2 = 1$, dvs. $k = \pm\frac{1}{3}$. Alltså är $(a, b, c) = \pm(1, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, vilket ger $D = \pm(3 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}) = \pm 3$.

Svar: Det finns två sådana tangentplan, $3x - 2y + 2z = \pm 3$.

5. Området D ser ut såhär (cirkeln har radien $\sqrt{2}$, linjen $y = x$ skär den i punkterna $\pm(1, 1)$):



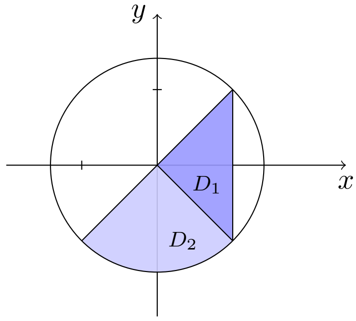
Vi kan alltså direkt räkna ut integralen i kartesiska koordinater:

$$\begin{aligned} \iint_D x\, dxdy &= \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{x} x\, dy \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{1} \left(x^2 - x\sqrt{2 - x^2} \right) dx \\ &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}(2 - x^2)^{3/2} \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(Här behöver man egentligen inte ens räkna ut primitiv funktion till $x\sqrt{2 - x^2}$; det är ju en udda funktion, så $\int_{-1}^{1} x\sqrt{2 - x^2}\, dx$ måste bli noll.)

Alternativ lösning: Med uppdelning i delområden D_1 och D_2 enligt figuren nedan blir $\iint_{D_2} x\, dxdy = 0$ av symmetriskäl, vilket ger

$$\iint_D x\, dxdy = \iint_{D_1} x\, dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-x}^{x} x\, dy \right) dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$



Svar: 2/3.

6. Vi beräknar först att f har en stationär punkt med kvadratisk form $Q(h,k) = -2(h-k)^2$ i origo. Denna är negativt semi-definit, och ingen slutsats om lokalt extremvärde kan dras av detta. Den kvadratiska formens utseende leder oss till att studera f längs linjen $x = y$. Med envariabel-Maclaurinutveckling har vi

$$f(x,x) = 8\cos x + \frac{1}{1-4x^2} = 9 + (16 + \frac{1}{3})x^4 + O(x^6) > 9$$

för alla små $x \neq 0$. Å andra sidan har vi längs linjen $y = -x$ att

$$f(x,-x) = 8\cos x + 1 < 9$$

för alla små $x \neq 0$. Alltså har f inget lokalt extremvärde i origo.

7. Funktionen $F(x,\varepsilon) = x^7 + (1+\varepsilon)\,x$ är av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(x,\varepsilon) = (1,0)$ uppfyller $F(x,\varepsilon) = 2$, och $F'_x(1,0) = [7x^6 + 1 + \varepsilon]_{(1,0)} = 8 \neq 0$, så enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen $F(x,\varepsilon) = 2$ en $\mathcal{C}^1$-funktion $x(\varepsilon)$ lokalt kring $(x,\varepsilon) = (1,0)$. Per definition är $x(0) = 1$, och implicit derivering ger

$$x'(0) = -\frac{F'_\varepsilon(1,0)}{F'_x(1,0)} = -\frac{1}{8}.$$

Lösningen till ekvationen $x^7 + \frac{101}{100}\,x = 2$, alltså $x(\frac{1}{100})$, bör därför vara ungefär

$$x(\tfrac{1}{100}) \approx x(0) + \tfrac{1}{100}\,x'(0) = 1 + \tfrac{1}{100} \cdot \tfrac{-1}{8} = \tfrac{799}{800}.$$

Svar: $x(0) = 1$, $x'(0) = -1/8$, approximativ lösning 799/800.

(Anm.: Utan noggrannare undersökning, t.ex. genom uppskattning av $|x''(\varepsilon)|$, kan vi naturligtvis inte säga någonting om hur *bra* denna approximation är, för hur vet vi att $\varepsilon = \frac{1}{100}$ är tillräckligt litet för att approximation med hjälp av förstaderivatan ska vara användbart? Numerisk lösning av ekvationen ger dock $x(\frac{1}{100}) \approx 0{,}998747456$, så vårt värde $\frac{799}{800} = 0{,}99875$ var inte jättelångt ifrån.)