

### Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-06-03

1. Från den första ekvationen  $z'_x = y^2 e^x + 1$  får vi  $z = y^2 e^x + x + k(y)$ . Derivation med avseende på  $y$  och användande av den andra ekvationen  $z'_y = 2ye^x - 2$  ger  $2ye^x + k'(y) = 2ye^x - 2$ , så att  $k'(y) = -2$ , och därmed  $k(y) = -2y + c$ . Det vill säga  $z(x, y) = y^2 e^x + x - 2y + c$ .

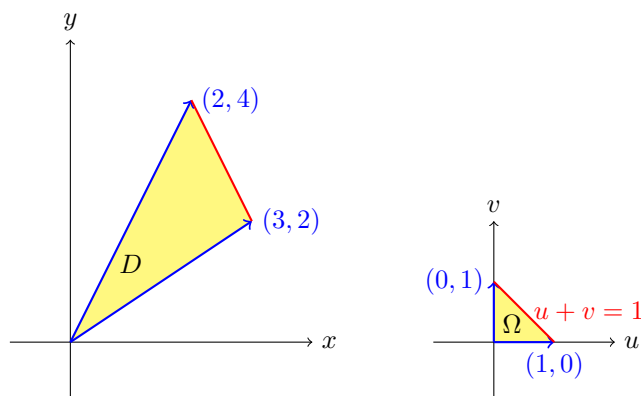
Bivillkoret ger nu  $z(0, y) = y^2 - 2y + c = y^2 - 2y + 4$ , d.v.s.  $c = 4$ .

**Svar:**  $z(x, y) = y^2 e^x + x - 2y + 4$ .

2. Vi gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = 3u + 2v \\ y = 2u + 4v \end{cases}$$

Notera att detta är ett inverterbart linjärt variabelbyte, och  $(u, v) = (1, 0)$  ger  $(x, y) = (3, 2)$ ,  $(u, v) = (0, 1)$  ger  $(x, y) = (2, 4)$ . Alltså avbildas triangeln  $\Omega$  i  $uv$ -planet på vår triangel  $D$  i  $xy$ -planet enligt nedanstående figur:



$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8, \text{ så } dx dy = 8 du dv.$$

Vidare har vi  $2x - y = 2(3u + 2v) - (2u + 4v) = 4u$  och  $3y - 2x = 3(2u + 4v) - 2(3u + 2v) = 8v$ .

$$\begin{aligned} \iint_D (3y - 2x)(2x - y) dx dy &= \iint_{\Omega} 8v \cdot 4u \cdot 8 du dv \\ &= 32 \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} 8uv dv \right) du = 32 \int_0^1 [4uv^2]_{v=0}^{1-u} du = 32 \int_0^1 4u(1-u)^2 du \\ &= 32 \int_0^1 (4u - 8u^2 + 4u^3) du = 32 \left[ 2u^2 - \frac{8u^3}{3} + u^4 \right]_0^1 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

\*) Ett alternativ, som i detta fall blir lite jobbigare, är att dela upp integralen i två delar:

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left( \int_{2x/3}^{2x} (3y - 2x)(2x - y) dy \right) dx + \int_2^3 \left( \int_{2x/3}^{-2x+8} (3y - 2x)(2x - y) dy \right) dx = \\ &\dots = \frac{128}{27} + \frac{160}{27} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

**Svar:**  $32/3$ .

3. Ytan kan skrivas som nivåytan  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$ . För en tangeringspunkt  $(a, b, c)$  gäller  $\nabla F(a, b, c) = (2a, 4b, 8c) \parallel (1, -2, 2)$ , vilket ger  $b = -a$  och  $c = a/2$ , som insatt i ytans ekvation ger  $16 = F(a, b, c) = 4a^2$ , d.v.s.  $a = \pm 2$ . De två tangeringspunkterna är alltså  $(a, b, c) = \pm(2, -2, 1)$ , och därmed blir  $A = a - 2b + 2c = \pm 8$ .

**Svar:**  $A = \pm 8$ .

4. (a) Eftersom  $f(0, 0, z) = 1 + z^3$  uppfyller att  $f(0, 0, z) < f(0, 0, 0)$  om  $z < 0$  men  $f(0, 0, z) > f(0, 0, 0)$  om  $z > 0$  så har  $f$  ingen extrempunkt i origo.

**Svar:** Origo är inte en extrempunkt till  $f$ .

- (b) Vi använder att  $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$  med  $t = xy$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + x^2 + 2y^2 + \sin(xy) = 1 + x^2 + y^2 + (xy + \mathcal{O}((xy)^3)) \\ &= 1 + x^2 + xy + 2y^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^6). \end{aligned}$$

Vi ser alltså att  $\nabla f(0, 0) = 0$ , så det är en stationär punkt, och den kvadratiske formen uppfyller

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + y/2)^2 + \frac{7y^2}{4}.$$

Alltså är den positivt definit, så punkten är en lokal minpunkt.

(Man kan även skriva

$$x^2 + xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

och beräkna egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1/4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Eftersom båda dessa är positiva är den kvadratiske formen positivt definit.)

**Svar:** Origo är ett lokalt minimum till  $f$ .

5. De två bivillkoren  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 3$  och  $h(x, y) = x - y \geq 0$  bestämmer en sluten delmängd av en ellipsskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen  $f(x, y) = xy$  är ett polynom, alltså kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för  $f$  på denna mängd.

Vi får  $\nabla f = (y, x)$ ,  $\nabla g = (2x + 2y, 2x + 8y)$  och  $\nabla h = (1, -1)$ . Kandidatjakt:

- dim 2 (inre punkter,  $g < 3$ ,  $h > 0$ ):  $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ , men  $h(0, 0) = 0 \not> 0$ . Ingen kandidat här.
- dim 1, består av två delar:
  - (ellipskurvan  $g = 3$ ,  $h > 0$ ):

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x_2y & 2x + 8y \end{vmatrix} = 8y^2 - 2x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y$$

Fallet  $x = 2y$  insatt i  $g = 3$  ger  $y^2 = 1/4$  och kandidaten  $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  (den andra punkten man får,  $(-1, -\frac{1}{2})$ , uppfyller ej kravet  $h > 0$ ).

Fallet  $x = -2y$  ger analogt  $y^2 = 3/4$  och kandidaten  $f(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3/2$  (den andra punkten man får,  $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , uppfyller ej kravet  $h > 0$ ).

- (sträckan  $g < 3$ ,  $h = 0$ ):  $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (y, x) \parallel (1, -1) \Leftrightarrow y = -x$ , som insatt i  $h = 0$  och kontrollerad mot  $g < 3$  ger kandidaten  $f(0, 0) = 0$ .

- dim 0 (hörn,  $g = 3$ ,  $h = 0$ ): Ekvationssystemet  $g = 3$ ,  $h = 0$  ger genast  $7x^2 = 3$  och  $y = x$ , alltså kandidaterna  $f(\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}) = f(-\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}) = \frac{3}{7}$ .

**Svar:**  $f_{\max} = f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ,  $f_{\min} = f(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}$ .

6. Vi använder sfäriska (rymdpolära) koordinater. Vi vet att  $xy$ -planet ges av att  $\theta = \pi/2$ , och området  $x > 0, y < 0$  ges av att  $-\pi/2 < \varphi < 0$ .

Alltså ges området  $D$  av att  $-\pi/2 < \varphi < 0, \pi/2 < \theta < \pi$  och  $r > 0$ .

Integranden är negativ på hela integrationsområdet och integralen är endast generaliserad i oändligheten. Alltså räcker det att kolla på en uttömmande följd, och vi tömmer ut  $D$  med områdena  $D_R$  som ges av att  $-\pi/2 < \varphi < 0, \pi/2 < \theta < \pi$  och  $0 < r < R$ .

$$\begin{aligned} \iiint_{D_R} y e^{-(x^2+y^2+z^2)^2} dx dy dz &= \int_{-\pi/2}^0 \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^R r \sin \theta \sin \varphi \cdot e^{-r^4} \cdot r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \sin \varphi d\varphi \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R r^3 e^{-r^4} dr \\ &= [-\cos \varphi]_{-\pi/2}^0 \cdot \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[ \frac{-e^{-r^4}}{4} \right]_0^R = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{4} - \frac{-e^{-R^4}}{4} \right) \rightarrow -\frac{\pi}{16} \text{ då } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Svar:** Integralen är konvergent med värdet  $-\pi/16$ .

7. Om vi använder matrisnotation gäller

$$\bar{f}(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + v^2 \\ u^2 - v^2 \\ \sin(u + v) \end{pmatrix}.$$

Funktionalmatrisen ges av

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \\ \cos(u + v) & \cos(u + v) \end{pmatrix},$$

så

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$\bar{f}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ges tangentplan på parameterform av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ \pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad h, k \in \mathbb{R},$$

eller ekvivalent

$$(x, y, z) = (\pi^2, \pi^2, 0) + h(2\pi, 2\pi, -1) + k(0, 0, -1), \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

(Notera att  $\bar{f}(\pi + h, 0 + k) = \bar{f}(\pi, 0) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial(u, v)}(\pi, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \text{restterm}$ , så tangentplanet ges av att ta bort resttermen i detta uttryck.) För att få en normalvektor kan vi kryssa tangentvektorer:

$$(2\pi, 2\pi, -1) \times (0, 0, -1) = (-2\pi, 2\pi, 0) = -2\pi(1, -1, 0).$$

Så tangentplanet ges på normalform av

$$(1, -1, 0) \cdot ((x, y, z) - (\pi^2, \pi^2, 0)) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

**Svar:** Funktionalmatrix:  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Tangentplan på parameterform:

$$(x, y, z) = (\pi^2, \pi^2, 0) + h(2\pi, 2\pi, -1) + k(0, 0, -1), \quad h, k \in \mathbb{R}.$$

Tangentplan på normalform:  $x - y = 0$ .