Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2019-08-22

1. Stationära punkter: $f'_x = 2xz^2 = 0$, $f'_y = 4y + 2z + 2 = 0$, $f'_z = 2x^2z + 2z + 2y = 0$. Den första ekvationen ger fallen $x = 0$ respektive $z = 0$. Om $x = 0$ får vi $4y + 2z + 2 = 0$ och $2z + 2y = 0$, d.v.s. $(x, y, z) = (0, -1, 1)$; om z = 0 får vi $4y + 2 = 0$ och $y = 0$, som ger en motsägelse. Alltså är $(0, -1, 1)$ funktionens enda stationära punkt.

   I punkten $(0, -1, 1)$ får vi $f''_{xx} = 2z^2 = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 4xz = 0$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = 2$ och $f''_{zz} = 2x^2 + 2 = 2$, och därmed den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = (h\,k\,l) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = 2h^2 + 4k^2 + 4kl + 2l^2 = 2(h^2 + (l + k)^2 + k^2)$$

   så $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l), och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $h = 0$, $l + k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Q är alltså positivt definit, och punkten $(0, -1, 1)$ är därmed en lokal minimipunkt.

   Svar: $(0, -1, 1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas

2. Linjärt byte (translation) $u = x-1$, $v = y+2$, som ger nytt område $E : u^2+v^2 \leq 9$ och $dudv = dxdy$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, ger

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dxdy &= \iint_E (u + 1)(v - 2)\,dudv \\
&= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos\varphi\sin\varphi - 2\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi - 2)d\varphi \right) \rho d\rho \\
&= \int_0^3 \left[\rho^2 \frac{\sin^2\varphi}{2} - 2\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi - 2\varphi \right]_0^{2\pi} \rho d\rho = -4\pi \int_0^3 \rho d\rho = -18\pi
\end{aligned}$$

   Svar: -18π.

3. Ekvationen kan skrivas $F(x, y) = xy + \sin x + ey = e$. Eftersom F är en elementär funktion, gäller $F \in C^1$ och dessutom $F(0, 1) = e$. Eftersom $\nabla F = (y + \cos x, x + e^y) = (2, e)$ då $(x, y) = (0, 1)$ och $F'_x(0, 1) = 2 \neq 0$, ger implicita funktionssatsen en lokalt definierad C^1-funktion $x = f(y)$ kring $(0, 1)$. Varje tangentvektor $\mathbf{v}$ till kurvan $x = f(y)$ i punkten $(0, 1)$ är vinkelrät mot $(2, e)$, så exempelvis duger $T = (e, -2)$.

   (Varje svar $\mathbf{v} = s(e, -2)$, $s \neq 0$, är naturligtvis också rätt)

4. Integration av ekvation 3 ger $u(x, y, z) = ze^{x+2y} + y^2z - z + g(x, y)$, och derivering av u m.a.p. y och insättning i ekvation 2 ger sedan $g'_y(x, y) = -x$, så $g(x, y) = -xy + h(x)$. Vidare, derivering av $u(x, y, z) = ze^{x+2y} + y^2z - z - xy + h(x)$ m.a.p. x och insättning i ekvation 1 ger $h'(x) = 0$, så $h(x) = C$. Bivillkoret $f(0, 0, 0) = 3$ ger slutligen $C = 3$.

   Svar: $u(x, y, z) = ze^{x+2y} + y^2z - xy - z + 3$.

5. Det linjära bytet $u = 2x$, $v = y\sqrt{3}$, $w = z$, som ger nytt område

$$E : 1 \leq u^2 + v^2 + w^2 \leq 4, \qquad w \geq 0, \quad 0 \leq u \leq v\sqrt{3} \quad \text{och} \quad dudvdw = 2\sqrt{3}dxdydz,$$

   följt av rymdpolärt byte $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$ med nytt område

$$F : 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad dudvdw = r^2\sin\theta dr\,d\theta\,d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x^2 + y^2)z\,dxdydz &= \iiint_E (\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{3})w\,\frac{dxdydz}{2\sqrt{3}} \\
&= \iiint_E (\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{4} + \frac{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{3})r\cos\theta \cdot \frac{r^2\sin\theta drd\theta d\varphi}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{7\varphi}{24} - \frac{\sin 2\varphi}{48}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{7}{384}\left(\frac{7\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

   Svar: $\frac{7}{384}\left(\frac{7\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\right)$

6. (a): Med sfäriska koordinater får vi:

$$\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2+x^2z^2} = \frac{r^3(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^3\theta+\cos^3\theta)}{r^2+r^4\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{r\overbrace{(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^3\theta+\cos^3\theta)}^{\text{Begränsad.}}}{1+r^2\underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta}_{\text{Begränsad}}}.$$

Eftersom täljaren går mot 0 och nämnaren mot 1 då $r\to 0$, samt att $r\to 0$ om $(x,y,z)\to(0,0,0)$ följer det att

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2+x^2z^2}=0.$$

(b): Om vi går mot $(0,0)$ längs $y=0$ får vi

$$\frac{x^4}{x^4+x^3}=\frac{x}{x+1}\to 0 \text{ då } x\to 0.$$

Om vi går mot $(0,0)$ längs $y=x$ får vi

$$\frac{x^4+x^4}{x^4}=\frac{2x^4}{x^4}=2\to 2 \text{ då } x\to 0.$$

Eftersom vi får olika värden längs med dessa kurvor existerar inte gränsvärdet.

7. Längs strålen $x=2y$, $y\geq 0$, gäller $f(x,y)=f(2y,y)=6y-4\to\infty$ då $y\to\infty$, så största värde tydligen saknas.

   Vidare, då $x\geq 0$ och $y\geq 0$ får vi

$$f(x,y)=\frac{3x-4}{(x-2y)^2+1}\overset{(1)}{\geq}\frac{-4}{(x-2y)^2+1}\overset{(2)}{\geq}\frac{-4}{0+1}=-4$$

   och vi har likhet i (1) precis då $x=0$ och i (2) precis då $x-2y=0$, d.v.s. vi har $f(x,y)\geq -4$ med likhet precis då $(x,y)=(0,0)$.

   Svar: $f_{\max}$ existerar ej medan $f_{\min}=f(0,0)=-4$.