

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2019-08-22 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x, y, z) = x^2z^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz + 2y$.
2. Beräkna $\iint_D xy \, dx dy$ där D ges av $x^2 - 2x + y^2 + 4y \leq 4$.
3. Visa att ekvationen $xy + \sin x + e^y = e$ i en omgivning av $(x, y) = (0, 1)$ entydigt definierar en C^1 -funktion $x = f(y)$ och bestäm en tangentvektor till kurvan $x = f(y)$ i punkten $(0, 1)$.
4. Bestäm alla C^1 -lösningar $u(x, y, z)$ till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} u'_x &= z e^{x+2y} - y \\ u'_y &= 2z e^{x+2y} + 2yz - x \\ u'_z &= e^{x+2y} + y^2 - 1 \end{cases}$$

med villkoret $u(0, 0, 0) = 3$.

5. Beräkna $\iiint_D (x^2 + y^2)z \, dx dy dz$ där D ges av $1 \leq 4x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$ och $0 \leq 2x \leq 3y$.

6. Undersök gränsvärdena:

$$(a) \lim_{(x;y;z) \rightarrow (0;0;0)} \frac{x^2y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2 + x^2z^2} \quad (1p)$$

$$(b) \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^4 + y^4}{x^4 + (x - y)^3} \quad (2p)$$

7. Bestäm största och minsta värdet (om de finns) av $f(x, y) = \frac{3x - 4}{(x - 2y)^2 + 1}$ då $x \geq 0$ och $y \geq 0$. Motivera nogga!