Lösningsskisser till TATA43 och 9GMA08 Flervariabelanalys 2020-06-03

1. (a) $\nabla f(0,0) = (1,-2) \neq (0,0)$ så det är inte en stationär punkt, och således inte en extrempunkt.

   Svar: Ej extrempunkt.

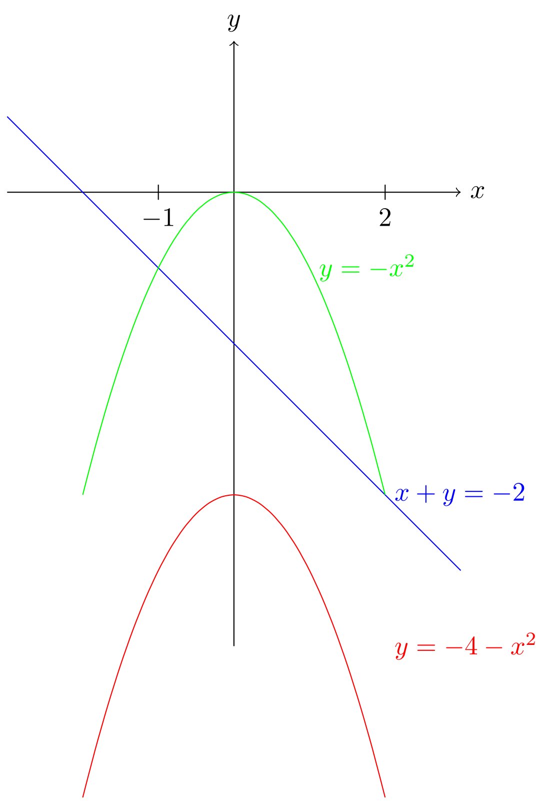
   (b)
$$f'_x = \frac{1}{2} - \frac{6x}{4} - 3y + x^2, \quad f'_x(1,0) = 0, \quad f'_y = 3 - 3x + 20y, \quad f'_y(1,0) = 0,$$
   så $(1,0)$ är en stationär punkt. Vidare har vi
$$f''_{xx} = -\frac{3}{2} + 2x; \quad f''_{xx}(1,0) = \frac{1}{2}, \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{yy} = 20.$$
   Den kvadratiska formen
$$\begin{aligned} Q(h,k) &= f''_{xx}(1,0)h^2 + 2f''_{xy}(1,0)hk + f''_{yy}(1,0)k^2 \\ &= \frac{h^2}{2} - 6hk + 20k^2 = \frac{1}{2}((h-6k)^2 - 36k^2) + 20k^2 = \frac{1}{2}(h-6k)^2 + 2k^2 \end{aligned}$$
   är positivt definit, så vi har ett lokalt minimum i $(1,0)$.

   Svar: Lokalt minimum.

   (c) Eftersom $f(x,y) = (x-y)^4 \geq 0$ för alla (x,y) och $f(0,0) = 0$ har vi ett (t.o.m. globalt) minimum i $(0,0)$.

   Svar: Lokalt minimum.

2. Området D ligger mellan kurvorna $y = -x^2$ och $x + y = -2$ nedan. Ovanför kurvan $x^2 + y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -4 - x^2$ är $x^2 + y + 4$ positiv.



   (a) På D gäller
$$x^2 + y + 4 \geq x^2 - 2 - x + 4 = x^2 - x + 2 = (x - 1/2)^2 + 7/4 > 0.$$
   Eftersom integranden är positiv på integrationsområdet är integralen det också.

   Svar: $I > 0$.

(b) Vi noterar att kurvorna $y=-x^2$ och $y=-2-x$ skär varandra då $x=-1$ respektive $x=2$. Så $D=\{(x,y):-1\leq x\leq 2, -2-x\leq y\leq -x^2\}$.

$$\iint_D (x^2+y+4)\,dxdy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-2-x}^{-x^2}(x^2+y+4y)\,dy\right)dx = \ldots = \frac{279}{20}.$$

Svar: $\frac{279}{20}$.

3. (a)

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (g'(x^2+\cos y)\cdot 2x, g'(x^2+\cos y)\cdot(-\sin y)).$$

Eftersom $g'(1^2+\cos\pi)=g'(0)$ får vi

$$\nabla f(1,\pi) = (g'(0)\cdot 2\cdot 1, g'(0)\cdot(-\sin\pi)) = 2g'(0)(1,0).$$

Svar: $2g'(0)(1,0)$.

(b) Vi observerar att $\overline{v}$ har längd 1, så

$$f'_{\overline{v}}(1,\pi) = \nabla f(1,\pi)\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = 2g'(0)(1,0)\bullet\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{4}{\sqrt{5}}g'(0).$$

Svar: $\frac{4}{\sqrt{5}}g'(0)$.

(c)

$$\overline{u} = \frac{\nabla f(1,\pi)}{|\nabla f(1,\pi)|} = \frac{2g'(0)(1,0)}{|2g'(0)(1,0)|} = \frac{g'(0)}{|g'(0)|}(1,0) = -(1,0) \text{ eftersom } g'(0)<0.$$

Svar: $-(1,0)$.

4. Bivillkoren $g(x,y):=2xy\geq 3$ och $h(x,y):=2x+y\leq 4$ avgränsar i första kvadranten en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x,y)=(2-xy)e^{-x-y}$ är kontinuerlig där, så största och minsta värde existerar. Kandidatjakt:

- *dim*2 (inre punkter): $f'_x=e^{-x-y}(xy-y-2)=0$ och $f'_y=e^{-x-y}(xy-x-2)=0$ ger $xy=y+2=x+2$, d.v.s. $x=y$ och $x^2=x+2$, så stationära punkter är $(-1,-1)$ och $(2,2)$, men båda ligger utanför mängden. Inga kandidater här.
- *dim*1 (kantkurvor) består av två delar:
  - ◇ $\{2xy>3, 2x+y=4\}$: villkoret $h(x,y)=4$ är aktivt, alltså $\nabla f \parallel \nabla h$ vilket ger

    $$\begin{vmatrix} e^{-x-y}(xy-y-2) & e^{-x-y}(xy-x-2) \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = e^{-x-y}(2x-y-xy+2)=0$$

    och substitution av $y=4-2x$ ger $2e^{x-4}(x^2-1)=0$ precis då $x=\pm1$, som ger kandidaten $\boxed{f(1,2)=0}$ (den andra punkten ligger utanför mängden).
  - ◇ $\{2xy=3, 2x+y<4\}$: villkoret $g(x,y)=3$ är aktivt, alltså $\nabla f\parallel\nabla g$ vilket ger

    $$\begin{vmatrix} e^{-x-y}(xy-y-2) & e^{-x-y}(xy-x-2) \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 2e^{-x-y}(xy-2)(x-y) =$$

    $$= (\text{eftersom } xy=3/2) = 2e^{-x-\frac{3}{2x}}\left(x-\frac{3}{2x}\right)=0$$

    precis då $x=\pm\sqrt{3/2}$, som ger kandidaten $\boxed{f(\sqrt{3/2},\sqrt{3/2})=\frac{1}{2}e^{-\sqrt{6}}}$ (den andra punkten ligger utanför mängden).
- – *dim*0 (hörn): $2xy=3$ och $2x+y=4$ ger kandidaterna $\boxed{f(\frac{1}{2},3)=\frac{1}{2}e^{-7/2}}$ och $\boxed{f(\frac{3}{2},1)=\frac{1}{2}e^{-5/2}}$.

Eftersom alla kanidater ger värde > 0 förutom $f(1,2) = 0$, så har vi $f_{\min} = f(1,2) = 0$.
Svar: $f_{\min} = f(1,2) = 0$ och $f_{\max} = f(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{6}}$.

5. (a) Med $u = x$ och $v = y\sqrt{x}$ får vi

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 0, \quad v'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad v'_y = \sqrt{x}.$$

Detta ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + \frac{y}{2\sqrt{x}} z'_v,$$
$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = \sqrt{x} z'_v.$$

Så

$$2xz'_x - yz'_y = 2x(z'_u + \frac{y}{2\sqrt{x}} z'_v) - y(\sqrt{x} z'_v) = 2xz'_u = 2uz'_u = x^2 y = u^{3/2} v.$$

D.v.s.

$$z'_u = \frac{\sqrt{u}v}{2}.$$

Detta ger via integration m.a.p. u

$$z = \frac{u^{3/2}v}{3} + k(v) = \frac{x^2 y}{3} + k(y\sqrt{x}) \text{ där } k \text{ är av klass } \mathcal{C}^1.$$

Svar: $z = \dfrac{x^2 y}{3} + k(y\sqrt{x})$, k av klass $\mathcal{C}^1$.

(b)

$$z(4, y) = \frac{16y}{3} + k(2y) = 0$$

ger med $t = 2y$

$$\frac{8t}{3} + k(t) = 0.$$

D.v.s. $k(t) = -8t/3$, så

$$z = \frac{x^2 y}{3} - \frac{8y\sqrt{x}}{3}.$$

Svar: $z = \dfrac{x^2 y}{3} - \dfrac{8y\sqrt{x}}{3}$.

(c) $z = x^2 y/3 + k(y\sqrt{x})$ ger

$$z'_x = \frac{2xy}{3} + k'(y\sqrt{x}) \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad z'_y = \frac{x^2}{3} + k'(y\sqrt{x})\sqrt{x}.$$

Så

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\left(\frac{2xy}{3} + k'(y\sqrt{x})\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) - y\left(\frac{x^2}{3} + k'(y\sqrt{x})\sqrt{x}\right) = \ldots = x^2 y,$$

vilket visar att lösningen i (a) är korrekt.
$z = x^2 y/3 - 8y\sqrt{x}/3$ ger på samma sätt

$$z'_x = \frac{2xy}{3} - \frac{4y}{3\sqrt{x}}, \quad z'_y = \frac{x^2}{3} - \frac{8\sqrt{x}}{3}.$$

Så

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\left(\frac{2xy}{3} - \frac{4y}{3\sqrt{x}}\right) - y\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8\sqrt{x}}{3}\right) = \ldots = x^2 y.$$

Vidare gäller

$$z(4, y) = \frac{4^2 y}{3} - \frac{8y\sqrt{4}}{3} = 0,$$

så även bivillkoret är uppfyllt.

6. Integralen är generaliserad och integrationsområdet ges av att $x^2 + y^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 \leq z < \infty$. Eftersom integranden är positiv kan vi tillämpa Fubinis sats och får

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2)z^2}\,dxdydz &= \iint_{x^2+y^2\geq 4} \left(\int_{x^2+y^2}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)z^2}\,dz \right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\geq 4} \left[\frac{-1}{(x^2+y^2)z} \right]_{z=x^2+y^2}^{\infty} dxdy = \iint_{x^2+y^2\geq 4} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_2^{\infty} \frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho \right) d\varphi = 2\pi \left[\frac{-1}{2\rho^2} \right]_{\rho=2}^{\infty} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent med värde $\frac{\pi}{4}$.

7. Vi har följande fall att beakta:

- $a \neq 0$ och $b \neq 0$:
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2-ay^3} \to \frac{-2b^3}{-ab^3} = \frac{2}{a} \quad \text{då } (x,y) \to (0,b),$$
eftersom nämnaren går mot $-ab^3 \neq 0$, och vi kan förkorta bort $b^3 \neq 0$. Så gränsvärdet existerar och är $2/a$.
- $a = 2$ och $b = 0$: Eftersom $b = 0$ ska vi undersöka gränsvärdet då $(x,y) \to (0,0)$. Insättning av $a = 2$ ger
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2-ay^3} = \frac{x^2-2y^3}{x^2-2y^3} = 1$$
för alla (x,y) där uttrycket är definierat (dvs. överallt utom längs kurvan $x^2 = 2y^3$), så gränsvärdet då $(x,y) \to (0,0)$ existerar och är 1.
- $a \neq 2$ och $a \neq 0$, samt $b = 0$: Även här ska $(x,y) \to (0,0)$. Längs linjen $x = 0$ får vi
$$\frac{0^2-2y^3}{0^2-ay^3} = \frac{2}{a} \to \frac{2}{a} \quad \text{då } y \to 0,$$
men längs linjen $y = 0$ får vi
$$\frac{x^2-2\cdot 0^2}{x^2-a\cdot 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \quad \text{då } x \to 0,$$
så gränsvärdet existerar ej.
- $a = 0$: Vi har uttrycket
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2} = 1 - \frac{2y^3}{x^2}.$$
Detta uttryck är lika med 0 resp. 1 längs kurvorna $2y^3 = x^2$ resp. $y = 0$ (med origo undantaget i båda fallen), så det saknar gränsvärde i origo (dvs. gränsvärdet existerar ej i fallet $b = 0$). Om $b \neq 0$ har vi
$$1 - \frac{2y^3}{x^2} \to \begin{cases} -\infty & \text{om } b > 0 \\ \infty & \text{om } b > 0 \end{cases} \quad \text{då } (x,y) \to (0,b),$$
så gränsvärdet är inte ändligt. Oavsett b:s värde existerar alltså inte gränsvärdet ändligt när $a = 0$.

Svar: Gränsvärdet existerar ändligt omm a och b båda är nollskilda (och är då $2/a$) eller $(a,b) = (2,0)$ (och är då 1).