Lösningsskisser till tentamen i Flervariabelanalys TATA43

1. De stationära punkterna finnes som lösningar till $3x^2 + 3y^2 = 15$, $6xy + 3y^2 = 15$. Ekvationssystemet löses t ex genom subtraktion av ekvationerna, vilket ger $x(x-2y) = 0$ efter faktorisering. Falluppdelning, $x = 0$ och $x = 2y$, leder till de fyra lösningarna $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, $(2, 1)$ och $(-2, -1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$ och $f''_{yy} = 6x + 6y$. De kvadratiska formerna i de fyra punkterna blir:

   $Q_{(0,\sqrt{5})}(h,k) = 0 + 2 \cdot 6\sqrt{5}hk + 6\sqrt{5}k^2 = 6\sqrt{5}(k+h)^2 - 6\sqrt{5}h^2$,

   $Q_{(0,-\sqrt{5})}(h,k) = 0 - 2 \cdot 6\sqrt{5}hk - 6\sqrt{5}k^2 = -6\sqrt{5}(k+h)^2 + 6\sqrt{5}h^2$,

   $Q_{(2,1)}(h,k) = 12h^2 + 2 \cdot 6hk + 18k^2 = 12(h + k/2)^2 + 15k^2$,

   $Q_{(-2,-1)}(h,k) = -12h^2 - 2 \cdot 6hk - 18k^2 = -12(h + k/2)^2 - 15k^2$.

   Formerna är indefinit, indefinit, positivt definit respektive negativt definit. Funktionen har alltså ett lokal min i $(2, 1)$ och ett lokalt max i $(-2, -1)$.

2. Kedjeregeln ger $z'_x = -x^{-2}z'_u$ och $z'_y = y^{-1}z'_u - y^{-2}z'_v$. Detta insatt ger ekvationen $-y^{-1}z'_v = 1$, dvs $z'_v = -1/v$ i de nya variablerna. Den allmänna lösningen är $z = -\ln v + f(u)$, där f är en godtycklig envariabelfunktion. I de gamla variablerna är lösningen $z(x,y) = \ln y + f(1/x + \ln y)$. Randvillkoret ger $f(1/x) = \ln x$, dvs f är funktionen $f(t) = -\ln t$. Lösningen blir $z(x,y) = \ln y - \ln(1/x + \ln y)$.

3. Rymdpolära koordinater används självfallet då D är en åttondel av klotet med radie 2 och centrum i origo. I sådana koordinater, säger första ekvationen $0 \le r \le 2$, sista ekvationen $\pi/2 \le \theta \le \pi$, och andra och tredje tillsammans $-\pi/2 \le \varphi \le 0$, vilket definierar det nya området E. Då ett åttondels klot med radie 2 har volym $4\pi/3$, räcker det att beräkna integralen av termen xz. Variabelbytesformeln ger

$$\iiint_D xz\,dxdydz = \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{0} \cos\varphi\,d\varphi\right) = \tfrac{32}{5}[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta]_{\pi/2}^{\pi}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{0} = -\tfrac{32}{15}.$$

   Den sökta integralen är således $4\pi/3 - 32/15$.

4. Triangelns kanter ges av linjerna $3x - y = 0$, $2y - x = 0$ och $y + 2x = 5$. Variabelbytet $u = 3x - y$, $v = 2y - x$ överför området på triangeln $u \ge 0$, $v \ge 0$, $u + v \le 5$ och $|\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}| = \dfrac{1}{5}$. Därmed fås

$$\iint_D xe^{x-2y}\,dxdy = \frac{1}{5}\int_0^5\int_0^{5-v} \frac{2u+v}{5}e^{-v}\,dudv = \frac{1}{100}\int_0^5 \left[(2u+v)^2\right]_0^{5-v} e^{-v}\,dv =$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^5 (10-2v)e^{-v}\,dv = \frac{1}{10}\left[-(10-2v)e^{-v} + 2e^{-v}\right]_0^5 = (4 + e^{-5})/5.$$

5. Området är kompakt och funktionen är kontinuerlig, så största och minsta värde existerar. Sätt $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ och $h(x,y,z) = x$. Villkoret för en stationär punkt för f under bivillkoret $g = 1$ är att

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{pmatrix} z \\ z \\ x+y \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3z^2 - 2y(x+y) \\ x(x+y) - 3z^2 \\ 2yz - xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs parallella gradienter. Vi får ekvationssystemet $\begin{cases} 3z^2 = 2y(x+y), \\ x(x+y) = 3z^2, \\ (2y-x)z = 0, \\ x^2+2y^2+3z^2 = 1. \end{cases}$ Falluppdelning enligt tredje ekvationen.

Fall 1: $z = 0$. Om inte $y = -x$, så blir $x = y = 0$ enligt de första två ekvationerna, vilket strider mot sista. Alltså $y = -x$. Sista ekvationen ger $3x^2 = 1$, så $x = 1/\sqrt{3}$ då $x \geq 0$. Kandidat: $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 0)$.

Fall 2: $x = 2y$. Första ekvationen ger $3z^2 = 6y^2$, och insatt i sista att $12y^2 = 1$. Då $x \geq 0$, och därmed $y \geq 0$, fås kandidaterna $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{6})$ och $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{12}, -1/\sqrt{6})$.

Nu randcirkeln. Villkoret för en stationär punkt för f under bivillkoren $g = 1$, $h = 0$ är att $\begin{vmatrix} z & 2x & 1 \\ z & 4y & 0 \\ x+y & 6z & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} z & 2y \\ x+y & 3z \end{vmatrix} = 2(3z^2 - 2y(x+y)) = 0$, dvs linjärt beroende gradienter.

Vi får ekvationssystemet $\begin{cases} 3z^2 = 2y(x+y), \\ x^2+2y^2+3z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases}$ Sista i första ger $3z^2 = 2y^2$, och andra ger sedan $4y^2 = 1$. Detta ger kandidater $(0, 1/2, 1/\sqrt{6})$, $(0, 1/2, -1/\sqrt{6})$, $(0, -1/2, 1/\sqrt{6})$ och $(0, -1/2, -1/\sqrt{6})$.

Jämförelse av de sju kandidaternas funktionsvärden, ger att största värde $\sqrt{2}/4$ antas i $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{12}, 1/\sqrt{6})$, och minsta värde $-\sqrt{2}/4$ antas i $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{12}, -1/\sqrt{6})$.

6. Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3xy - z^2$. I en punkt (a,b,c) på ytan är en normalvektor till tangentplanet $\nabla f(a,b,c) = (2a+3b, 2b+3a, -2c)$. Tangentplanet är parallellt med x-axeln om och endast om $2a + 3b = 0$. Tangentplanet innehåller $(17,0,2)$ om och endast om $(2a+3b, 2b+3a, -2c) \cdot \big((17,0,2) - (a,b,c)\big) = 0$. Vi får ekvationssystemet $\begin{cases} 2a+3b = 0, \\ -(2b+3a)b - 2c(2-c) = 0, \\ a^2+b^2+3ab-c^2 = -2. \end{cases}$ Andra plus 2 gånger sista ger $2a^2 + 3ab - 4c = -4$. Detta och första ger $c = 1$. Första i sista ger nu $-5b^2/4 = -1$. De sökta punkterna blir $(-3/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 1)$ och $(3/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 1)$.

7. Vi noterar att integranden är positiv, vilket motiverar nedanstående räkningar.

   De fyra linjerna $x = \pm 1$ och $y = \pm 1$ delar planet i nio områden. Stycka upp integralen som en summa av de nio integralerna över dessa områden.

   I området $|x|, |y| \leq 1$ är $d(x,y) = 0$, och integralen blir $2 \cdot 2 \cdot e^0 = 4$.

   I området $|y| < 1, x > 1$ är $d(x,y) = x - 1$, och integralen blir $\int_1^\infty \left(\int_{-1}^1 dy\right) e^{1-x} dx = 2\int_0^\infty e^{-t} dt = 2$.

   I området $x, y > 1$ är $d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, och med variabelbytet $x = 1 + \rho\cos\varphi$, $y = 1 + \rho\sin\varphi$ blir integralen

$$\iint_{x,y>1} e^{-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} d\varphi\right) e^{-\rho}\rho d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \rho e^{-\rho} d\rho = \pi/2.$$

   Symmetri ger nu att den sökta integralen är $4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot \pi/2 = 12 + 2\pi$.