Lösningsskisser till TATA43 och 9GMA08 Flervariabelanalys 2020-11-01

1. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 3x^2 + 6x + 2z = 0$, $f'_y = 4y - 2z = 0$, $f'_z = 2z + 2x - 2y = 0$. De två sista ger $z = 2y$ och $x = -y$, som insatt i den första ger $3y^2 - 2y = 0$, och därmed de stationära punkterna $(0,0,0)$ och $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x + 6$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 2$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = -2$ och $f''_{zz} = 2$. I punkten $(0,0,0)$ får vi den kvadratiska formen

   $$Q_{(0,0,0)}(h,k,l) = 6h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l + h - k)^2 + 2(k + h)^2 + 2h^2,$$

   så $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $l + h - k = k + h = h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är alltså positivt definit, och $(0,0,0)$ är således en lokal minimipunkt för f.

   I punkten $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ är $f''_{xx} = 2$, och vi får

   $$Q_{(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})}(h,k,l) = 2h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l + h - k)^2 + 2(k + h)^2 - 2h^2,$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,0,1) = 2 > 0$ och $Q(1,-1,-2) = -2 < 0$, så punkten $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   Svar: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Variabelbytet $u = xy$, $v = x/y$ ger $z'_x = yz'_u + \frac{1}{y}z'_v$ och $z'_y = xz'_u - \frac{x}{y^2}z'_v$. Insättning i differentialekvationen ger $z'_u = e^{-v}$, $z = ue^{-v} + g(v)$ där en $g(v)$ är en C^1-funktion av en variabel. Vi får $z(x,y) = xye^{-x/y} + g(x/y)$. Bivillkoret ger

   $$0 = z(x, x^2) = x^3e^{-1/x} + g(1/x), \quad \text{dvs} \quad g(t) = -\frac{1}{t^3}e^{-t} \quad \text{och} \quad g(x/y) = -\frac{y^3}{x^3}e^{-x/y}$$

   Svar: $z = xye^{-x/y} - \frac{y^3}{x^3}e^{-x/y}$

3. Det linjära bytet $u = x$, $v = y$, $w = 2z$ ger en ny mängd $E: u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $u \leq 0$, $w \leq 0$ och $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \frac{1}{2}$, följt av byte till rymdpolära koordinater $0 \leq r \leq 2$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ ger

   $$\iiint_D xz\,dxdydz = \iiint_E \frac{uw}{2}\frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^2 r^2\sin\theta\cos\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi$$
   $$= \frac{1}{4}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}[\sin\varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{16}{15}$$

   Svar: $\frac{16}{15}$

4. Sätt $F(x,y,z) = xe^{xz} + xy^3 - z - yz^2$. Det föjer att $F \in C^1$, $F(0,1,0) = 0$ och $F'_x = e^{xz} + xze^{xz} + y^3 = 2 \neq 0$ i $(0,1,0)$. Implicita funktionssatsen ger nu att sambandet $F = 0$ i en omgivning av punkten $(0,1,0)$ definierar en C^1-funktion $x = x(y,z)$. Vi deriverar $F = 0$ implicit m.a.p. y och får $x'_ye^{xz} + xe^{xz}x'_yz + x'_yy^3 + 3xy^2 - z^2 = 0$ dvs $2x'_y = 0$ i $(0,1,0)$. Nu m.a.p. z: $x'_ze^{xz} + xe^{xz}(x'_zz + x) + x'_zy^3 - 1 - 2yz = 0$ dvs $2x'_z - 1 = 0$ i $(0,1,0)$. $\nabla F(0,1,0) = (2,0,-1)$ och tangentplanets ekvation är $2x - z = 0$ ty punkten $(0,1,0)$ tillhör tangentplanet.

   Svar: $x'_y(1,0) = 0$, $x'_z(1,0) = \frac{1}{2}$, $2x - z = 0$

5. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \leq 0$ och $h(x,y,z) = x - 2y + z + 1 \leq 0$ bestämmer en sluten och begränsad mängd och funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ är kontinuerlig. Alltså existerar största och minsta värde för f på den mängden. Vi har $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ och $\nabla h = (1,-2,1)$.

   Inre punkter (dim 3): $\nabla f \neq 0$ överallt. Kandidater saknas.

   Randpunkter (dim 2):

   (i) $g = 0$, $h < 0$. $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla g = 0 \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}$ som insatt i $g = 0$ ger $z = \frac{1}{2}$. Punkten $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ uppfyller **inte** villkoret $h < 0$.

   (ii) $g < 0$, $h = 0$. $\nabla f \not\parallel \nabla g$. Kandidater saknas.

Randpunkter (dim 1): Kurvan $g = 0$, $h = 0$. $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -3(2x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

som insatt i $g = 0, h = 0$ ger $y = z = \frac{1}{2}$ eller $y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{5}{2}$. Kandidater $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ och $f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{7}{2}$

Svar: $f_{\min} = f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ och $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{7}{2}$

6. Integralen är **generaliserad**. Eftersom integranden är **positiv** kan vi räkna som vanligt med itererad integration och även göra variabelbyten. Kvadratkomplettering ger

$$x^2 + 4xy + 6y^2 = (x+2y)^2 + (\sqrt{2}y)^2.$$

Ett naturligt variabelbyte är $u = x + 2y$, $v = \sqrt{2}y$. Vi får $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Variabelbytet ger en en-entydig avbildning, så området i uv-planet blir hela $\mathbf{R}^2$. Gör vi sedan ett polärt byte får vi

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + 4xy + 6y^2)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{1 + (u^2 + v^2)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\rho}{1 + \rho^4} d\rho \\ &= \sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{2} [\arctan \rho^2]_0^\infty = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

7. Vi betraktar tre fall: $x > 0$, $x < 0$ och $x = 0$.

- $x > 0$: $f(x,y) = x^2 - 2x - 2xy^2$. Lokal undersökning: $f'_x = 2x - 2 - 2y^2 = 0$, $f'_y = -4xy = 0$ ger en stationär punkt $(1,0)$ (observera att $x \neq 0$!). $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -4y$, $f''_{yy} = -4x$ ger $Q = 2h^2 - 4k^2$ som är indefinit ty t.ex. $Q(1,0) > 0$ och $Q(0,1) < 0$. Punkten $(1,0)$ är ej en lokal extrempunkt.
- $x < 0$: $f(x,y) = x^2 + 2x - 2xy^2$. Lokal undersökning: $f'_x = 2x + 2 - 2y^2 = 0$, $f'_y = -4xy = 0$ ger på samma sätt en stationär punkt $(-1,0)$ och $Q = 2h^2 + 4k^2$ som är positivt definit. Punkten $(-1,0)$ är en lokal minimipunkt.
- $x = 0$: $f(0,y) = 0$ för alla $y \in \mathbf{R}$. Om $0 < x < 2$ gäller $f(x,y) = x(x - 2 - 2y^2) < 0$ för alla $y \in \mathbf{R}$. När vi tittar på f:s värden i vänster halvplan, $x < 0$, behöver vi dela upp i **tre** fall. Betrakta punkten $(0,b), b \in \mathbf{R}$. Vi skall avgöra vilket tecken f har i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Observera att $x < 0$ of $f(x,y) = x(x + 2 - 2y^2)$.
  (a) $|b| > 1$: $f(x,y) = x(x + 2 - 2y^2) > 0$ i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Det följer att $(0,b)$ **inte** är en lokal extrempunkt.
  (b) $|b| = 1$: $f(x,b) = x^2 > 0$. Det följer att **ingen** av punkterna $(0, \pm 1)$ är lokal extrempunkt.
  (c) $|b| < 1$; $f(x,y) = x(x + 2 - 2y^2) < 0$ i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Det följer att $(0,b)$ är en lokal maximipunkt.

Svar: $(-1,0)$ är en lokal minimipunkt. Punkterna$(0,b)$, $|b| < 1$ är lokala maximipunkter.