Lösningsskisser till TATA43/9GMA08
Flervariabelanalys 2021-05-29

(1.) Stationära punkter fås ur villkoret $\nabla f(x,y,z)=0$, detta ger ett linjärt system med enda lösningen $(x,y,z)=(-1,-1,2)$.
Andra derivatorna blir $f''_{xx}=6$, $f''_{xy}=-2$, $f''_{xz}=2$, $f''_{yy}=2$, $f''_{yz}=0$, $f''_{zz}=2$, alltså i punkten $(-1,-1,2)$ kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 6h^2+2k^2+2l^2-4hk+4hl =$$
$$= 2(k^2+l^2+3h^2-2hk+2hl) =$$
$$= 2\left((k-h)^2+l^2+2h^2+2hl\right) = 2\left((k-h)^2+(l+h)^2+h^2\right)$$

är positivt definit ($Q\geq 0$ och $Q=0$ bara om $k-h=l+h=h=0$ dvs om $h=k=l=0$). Därmed är $(-1,-1,2)$ ett lok. minimum

Svar: $(-1,-1,2)$ är en lok. minimipunkt

---

(2) Med det föreslagna variabelbytet fås

$$xz'_x+2yz'_y = x\left(z'_u+\frac{2x}{y}z'_v\right)+2y\left(-\frac{x^2}{y^2}z'_v\right) = xz'_u$$

Så PDEn övergår i $xz'_u=x^2$, dvs $z'_u=x=u$.
Den allmänna lösningen är alltså $z=\frac{u^2}{2}+g(v)$
där $g\in C^1$ är godtycklig funktion av en variabel.

$$\Rightarrow z(x,y)=\frac{x^2}{2}+g\left(\frac{x^2}{y}\right).$$ Bivillkoret $z(x,1)=x^2$ ger

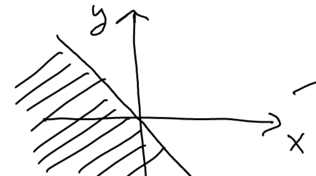
$$\frac{x^2}{2}+g(x^2)=x^2 \Rightarrow g(t)=\frac{t}{2}$$ där $t=x^2$, alltså

$$g\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{y}.$$

Svar: $z(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2y}$

---

(3) Byte till rymdpolära koordinater ger ett nytt område E som beskrivs av



- $x^2+y^2+z^2\leq 3 \Leftrightarrow r^2\leq 3 \Leftrightarrow 0<r\leq\sqrt{3}$
- $z\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$
- $\frac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{7\pi}{4}$ (eller $-\frac{5\pi}{4}\leq\varphi\leq-\frac{\pi}{4}$)

Integralen blir därmed

$$\iiint_D xz\,dxdydz = \iiint_E r\cos\varphi\sin\theta\cdot r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\sin\varphi\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{6}}{5}$$

Svar: $-\frac{3\sqrt{6}}{5}$

---

(4) De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \leq 1$ och $h(x,y,z) = 2xy = 1$ bestämmer en sluten delmängd av enhetsklot, alltså en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x,y,z) = x+y+z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största/minsta värde för f på denna mängd. Vi får $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla h = (2y, 2x, 0)$. Kandidatjakt:

- dim3 (inre punkter): Tomt här.
- dim2 (ytan $g<1$, $h=1$): $\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla h \\ g<1 \\ h=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,1,1) \parallel (2y, 2x, 0) \\ g<1 \\ h=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (0,0,0) \\ x^2+y^2+z^2 < 1 \quad \text{ok!} \\ 2xy = 1 \quad \rightarrow \text{fel} \end{cases} \Rightarrow$ inga kandidater här

- dim1 (kurvan $g=1$, $h=1$): $\nabla f, \nabla g; \nabla h$ är linjärt beroende

$$\Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2y & 2x & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y-x & z \\ y & x-y & 0 \end{vmatrix} = 4(x-y) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & -1 & z \\ y & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(x-y)(x+y-z).$$

a) $x=y$, insatt i $g=1$ och $h=1$ ger $2x^2+z^2=1$ och $2x^2=1$ och därmed kandidaterna

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = \sqrt{2}$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = -\sqrt{2}$.

b) $x+y=z$ ger $2x^2+2y^2+2xy = 1$ och $2xy=1$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, men $2xy = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ saknar lösningar.

Svar: $f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = \sqrt{2}$, $f_{min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) = -\sqrt{2}$

---

(5) $f = x^2+y^2-z^2 = 1$. Tangentplan till nivåytan $f=1$ i punkten (a,b,c) har $\nabla f(a,b,c) = \underbrace{(2a,2b,-2c)}$ som normalvektor, och det har alltså ekvationen $2a(x-a)+2b(y-b)-2c(z-c)=0$ vilket kan skrivas $ax+by-cz = \underbrace{a^2+b^2-c^2}_{f(a,b,c)} = 1$, eftersom punkten måste uppfylla $f(a,b,c)=1$.

Detta plan är parallell med $x-y-z=-1$, alltså $\underbrace{(2a,2b,-2c)}$ och $(1,-1,-1)$ är parallella, vilket ger

$(2a,2b,-2c)\times(1,-1,-1) = 0 \iff c = a = -b$, d.v.s.

Tangentplanets ekvation blir $a(x-y-z) = 1$.

Punkten $(3,2,2)$ ligger i planet $\Rightarrow a(3-2-2)=1$,

$a = c = -1$, $b = 1$.

Alltså $(a,b,c) = (-1,1,-1)$.

Svar: $(a,b,c) = (-1,1,-1)$ och tangentplan är $x-y-z=-1$.

---

(6) Sätt $F(x,y) = y\cos x + \cos y - \cos x$; vår ekvation kan då skrivas $F(x,y)=0$. Eftersom $F\in C^1$, $F(0,0)=0$ och $F'_y = \cos x - \sin y$, $F'_y(0,0) = 1 \neq 0$, följer från implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y)=0$ i någon omgivning till $(x,y)=(0,0)$ definierar en C^1-funktion $y(x)$, $y(0)=0$.

Implicit derivering ger:

$$y'\cos x - y\sin x - y'\sin y + \sin x = 0$$

$$(*) \quad y' = \frac{(y-1)\cdot\sin x}{\cos x - \sin y}, \quad y'(0) = \frac{(0-1)\cdot 0}{1-0} = 0$$

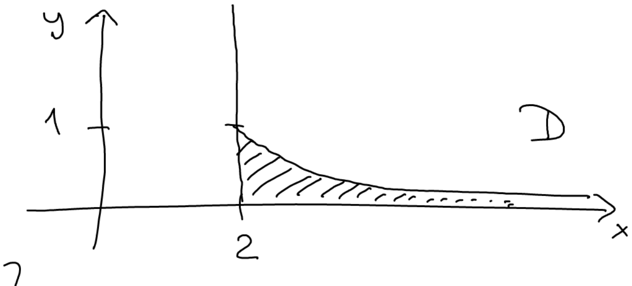
$\Rightarrow$ $x=0$ är en stationär punkt för $y(x)$. Dessutom, y är en C^1-funktion nära 0, och $(*)$ medför att $y'(x)\in C^1 \Rightarrow y\in C^2$.

$$y'' = \frac{(y'\sin x + (y-1)\cos x)\cdot(\cos x - \sin y) - (y-1)\sin x\cdot(-\sin x - y'\cos y)}{(\cos x - \sin y)^2},$$

$$y''(0) = \frac{(0-1)\cdot(1-0) - (-1)\cdot 0\cdot(0-0)}{1^2} = -1 < 0$$

Svar: $x=0$ är en lok. maximipunkt.

(7) Integralen är generaliserad (D är obegränsat), integranden $xy-1$ växlar tecken i D. Den positiva delen



$D^+ = \{ x > 2,\ 1 \le xy < 2,\ y > 0 \}$:

$$\iint_{D^+} (xy-1)\,dx\,dy = \int_{x=2}^{\infty} \left(\int_{y=1/x}^{y=2/x} (xy-1)\,dy \right) dx = \int_{x=2}^{\infty} \left[\frac{(xy-1)^2}{2x} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=\frac{2}{x}} dx =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{dx}{2x} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{R}{2} = \infty$$

vilket är en divergent integral. Därmed räknas hela dubbelintegralen över D som divergent (oavsett om den negativa delen är konvergent eller inte, så den saken behöver inte undersökas).

<u>Svar</u> <u>divergent</u>