

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2023-01-05 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

- Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy$
- Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $xz^2 + x^2 - xy - 4y = 0$ de punkter där linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ skär ytan.
- Beräkna $\iint_D \frac{1}{\sqrt{y+yx^2}} dx dy$ där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$.
- Bestäm alla C^2 -lösningar $u(x, y, z)$ till differentialekvationssystem:

$$\begin{cases} u'_x &= 2 \sin^2 y - z \\ u'_y &= 2x \sin 2y - z \sin y \end{cases}$$

under bivillkoret $u(x, 0, x) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

- Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z$ på den mängd där $x^2 + y^2 + z^2 \leq 12$ och $x - 2y - z \geq 0$.
- Beräkna

$$\iiint_D xyz \, dx dy dz$$

där D ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z^2 \geq 3(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \leq 0$.

- (a) Visa att ekvationen $\sin(x^2 y) = y^3 - 1$ i en omgivning av punkten $(0, 1)$ definierar en C^1 -funktion $y = y(x)$. (1p)
(b) Visa ytterligare att funktionen $y = y(x)$ är av klass C^2 i en omgivning av punkten $(0, 1)$. (1p)
(c) Avgör sedan om denna funktion har lokalt maximum eller lokalt minimum i punkten $x = 0$. (1p)