Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2023-10-26

1. (a) Med

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$$

får vi

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \text{ då } x \to 0,$$
$$f(0,y) = \frac{y^4}{y^2} = y^2 \to 0 \text{ då } y \to 0.$$

Eftersom vi fick olika värden längs två olika kurvor som går in mot punkten existerar inte gränsvärdet.

Svar: Existerar ej.

(b) Vi kan börja notera att $f(x,y) = x + 2x^2 - y^3$ uppfyller $f(1,-1) = 1 + 2 \cdot 1^2 - (-1)^3 = 4$, så grafen går genom punkten $(1,-1,4)$. Vi har nu $\nabla f(x,y) = (1+4x, -3y^2)$ så $\nabla f(1,-1) = (5,-3)$. Detta ger

$$f'_{\overline{v}}(1,-1) = \frac{\nabla f(1,-1) \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(5,-3) \bullet (2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10-3}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Formeln för tangentplanet till en graf $z = f(x,y)$ i punkten $(a,b,f(a,b))$ ges av

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b),$$

vilket med vårt f och $(a,b) = (1,-1)$ ger

$$z = 4 + 5(x-1) - 3(y+1).$$

Svar: Riktningsderivata: $f'_{\overline{v}}(1,-1) = 7/\sqrt{5}$, tangentplan: $z = 4 + 5(x-1) - 3(y+1)$.

2. (a) Med

$$\begin{cases} u &= x + 3y, \\ v &= y \end{cases}$$

får vi

$$\begin{cases} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = 3z'_u + z'_v. \end{cases}$$

Så

$$3z'_x - z'_y = 3z'_u - (3z'_u + z'_v) = -z'_v = 0,$$

dvs.

$$z'_v = 0 \Leftrightarrow z = f(u) = f(x+3y) \text{ där } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Svar: $z = f(x+3y)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(b)

$$z''_{xx} = 1 \Leftrightarrow z'_x = x + f(y) \Leftrightarrow z = \frac{x^2}{2} + xf(y) + g(y), \quad f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

Svar: $z = x^2/2 + xf(y) + g(y)$, $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

3. (a) Eftersom $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$ är punkten inte stationär, och alltså ingen extrempunkt.

Svar: Ej extrempunkt.

(b) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ så punkten är stationär. Dessutom gäller att $f(x,y) = 1 + Q(x,y) + \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$ där

$$Q(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 = 2(x + y/4)^2 - y^2/8 + y^2 = 2(x + y/4)^2 + 7y^2/8$$

som är positivt definit (dvs. > 0 för $(x,y) \neq (0,0)$). Alltså är $(0,0)$ ett lokalt minimum till f.

Svar: Lokalt minimum.

(c) Vi har

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3x^2 + 3x^2y, 8 - 8y + x^3); \quad \nabla f(0,1) = (0,0),$$

så $(0,1)$ är en stationär punkt. Vidare gäller

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2 - 6x + 6xy; \quad f''_{xx}(0,1) = 2, \\ f''_{xy}(x,y) &= 3x^2; \quad f''_{xy}(0,1) = 0, \\ f''_{yy}(x,y) &= -8; \quad f''_{yy}(0,1) = -8. \end{aligned}$$

Den kvadaratiska formen

$$Q(h,k) = f''_{xx}(0,1)h^2 + 2f''_{x,y}(0,1)hk + f''_{yy}(0,1)k^2 = 2h^2 - 8k^2$$

är indefinit (t.ex. är $Q(1,0) = 2 > 0$ och $Q(0,1) = -8 < 0$), så $(0,1)$ är en sadelpunkt till f, dvs. ingen lokal extrempunkt.

(Man kan även lösa uppgiften mer som i (b) genom att räkna ut

$$\begin{aligned} f(h, 1+k) &= -6 + 8(1+k) + h^2 - 4(1+k) - h^3 + h^3(1+k) \\ &= -2 + h^2 - 4k^2 + h^3k = -2 + (h^2 - 4k^2) + \mathcal{O}(|(h,k)|^3), \end{aligned}$$

och eftersom det inte finns med några förstagradstermer är gradienten noll i punkten, och den kvadratiska formen $h^2 - 4k^2$ (vilket är $Q(h,k)/2$ där Q är som ovan) är indefinit, så därför är det en sadelpunkt.)

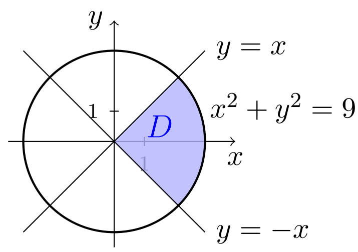
Svar: Ej extrempunkt (sadelpunkt).

4. Övergång till polära koordinater (ρ, φ) ger

$$\iint_D (x + 2y)\,dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^3 (\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \right) d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3}(\cos\varphi + 2\sin\varphi) \right]_{\rho=0}^{3} d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 9(\cos\varphi + 2\sin\varphi)d\varphi$$

$$= 9\left[\sin\varphi - 2\cos\varphi\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 9\sqrt{2}.$$



Svar: $9\sqrt{2}$.

5. Vi har $f(x;y) = 2x^2 + y^2 + 2y$ och sätter $g(x;y) = x^2 + y^2$; $h(x;y) = x$. f är kontinuerlig och villkoren $g \leq 4$ och $h \geq 1$ beskriver en sluten och begränsad mängd vilket betyder att f har ett största och minsta värde på mängden.

(2D) Stationära punkter: $f'_x = f'_y = 0$ ger $(x;y) = (0,-1)$ som inte tillhör mängden

(1D) cirkelbågen $g = 4$ och $h > 1$ ger $\nabla f(x,y) \parallel \nabla g$, alltså $\begin{vmatrix} 4x & 2x \\ 2y+2 & 2y \end{vmatrix} = 0$, dvs $x(y-1) = 0$. Eftersom $x > 1$ finner vi $y = 1$ och $g = x^2 + y^2 = 4$ ger $x = \pm\sqrt{3}$, där bara $x = \sqrt{3}$ uppfyller kravet $h > 1$. En kandidat här är $f(\sqrt{3}, 1) = 9$.

(1D) segmentet $h = 1$, $g < 4$ ger $\nabla f(x,y) \parallel \nabla h$, alltså $\begin{vmatrix} 4x & 1 \\ 2y+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, dvs $y = -1$, en kandidat här är $f(1,-1) = 1$.

(0D) hörnpukter som ges av $g = 4$, $h = 1$, d.v.s. två kandidater $f(1, \pm\sqrt{3}) = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

Eftersom $2\sqrt{3} < 2\sqrt{4} = 4$, optimering ger:

$$f(1,-1) = 1 < 5 - 2\sqrt{3} = f(1,-\sqrt{3}) < 5 + 2\sqrt{3} = f(1,\sqrt{3}) < 9 = f(\sqrt{3},1).$$

Svar: $f_{\max} = f(\sqrt{3},1) = 9$ och $f_{\min} = f(1,-1) = 1$.

6. Eftersom $0 < x^3 < x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ ser vi att D ges av olikheterna

$$0 < x < 1, \quad x^3 < y < x^2, \quad 4 < z < \infty.$$

Vi noterar nu att integralen är generaliserad både på grund av att området är obegränsat i z-led och att integranden är obegränsad i varje omgivning till $x = 0$. Men integranden är positiv så vi kan tillämpa Fubinis sats direkt:

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{1}{x^2 z^2}\, dxdydz &= \int_4^\infty \left(\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} \frac{1}{x^2 z^2}\, dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_4^\infty \left(\int_0^1 \frac{x^2 - x^3}{x^2} \frac{1}{z^2}\, dx \right) dz = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \cdot \int_4^\infty \frac{1}{z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{z} \right]_4^T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

(Alternativt kan man jobba med en uttömmande följd, t ex

$$D_n = \{(x,y,z) : 1/n < x < 1, x^3 < y < x^2, 4 < z < n\}$$

och får då

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{D_n} \frac{1}{x^2 z^2} dxdydz = \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{8}.)$$

Svar: 1/8.

7. För en given punkt

$$P = P(s,t) = (x,y,z) = (st^2 - s - 4t, s - t^2, s^2 + 4t) \text{ där } -1 < s < 1, -1 < t < 1$$

är vektorerna

$$(x'_s, y'_s, z'_s) = (t^2 - 1, 1, 2s) \text{ och } (x'_t, y'_t, z'_t) = (2st - 4, -2t, 4)$$

parallella med tangentplanet till ytan i P. Så om planet $x + 2y + z = d$ ska tangera ytan i P måste normalvektorn $(1,2,1)$ till planet vara ortogonal mot båda dessa vektorer, och vice versa om den är ortogonal mot båda dessa och vi väljer d så att $x + 2y + z = d$ går genom P, då är detta tangentplanet till ytan i P. Alltså får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} (1,2,1) \bullet (t^2 - 1, 1, 2s) = t^2 - 1 + 2 + 2s = 0 \\ (1,2,1) \bullet (2st - 4, -2t, 4) = 2st - 4 - 4t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2s = -1 \\ 2st - 4t = 0. \end{cases}$$

Ekvationen $2st - 4t = 0$ har lösningarna $s = 2$ och $t = 0$, där den första ligger utanför intervallet $-1 < s < 1$. Med $t = 0$ insatt i $t^2 + 2s = -1$ får vi $s = -1/2$ (om vi hade satt in $s = 2$ här hade vi inte fått någon reell lösning för t heller). Alltså finns det bara en punkt $(s,t) = (-1/2, 0)$ som ger ett $P(s,t)$ ovan som uppfyller kraven, och denna punkt blir då

$$P = (1/2, -1/2, 1/4).$$

För att bestämma d sätter vi in denna punkt i ekvationen

$$1/2 + 2(-1/2) + 1/4 = -1/4 = d.$$

Svar: Det enda d som ger ett plan $x + 2y + z = d$ som tangerar den givna ytan är $d = -1/4$, och planet tangerar då i punkten $(1/2, -1/2, 1/4)$ (som ges av $(s,t) = (-1/2, 0)$).