

Hemtentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2020-06-03 kl. 14.00–19.00

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Alla hjälpmedel är tillåtna **utom** samarbete med annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text med **vit bakgrund**.)
- Även om räknehjälpmedel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, dvs. som om man inte hade några hjälpmedel.
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida. Numrera sidorna (sorterade i uppgiftsordning).

Uppgift som bedöms vara godkänd får 3 eller 2 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/6 godkända uppgifter samt minst 8/13/18 poäng. Länk till lösningsskiss publiceras på kursens hemsida preliminärt två dagar efter avslutad tentamen.

- Kontrollera innan uppladdning att sidorna i din pdf-fil är så pass tydliga att text och symboler går att läsa (annars kan vi inte rätta tentan).
- Märk varje blad med kurskod, program samt **flowID**.
- **Jour:** Se <http://courses.mai.liu.se/GU/TATA43/Video/jour.php>

VAR GOD VÄND!

1. Avgör om följande funktioner har lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i den angivna punkten:

(a) $f(x, y) = x - 2y + x^2 + 2xy + 3y^2$ i punkten $(x, y) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = \frac{x}{2} + 3y - \frac{3x^2}{4} - 3xy + 10y^2 + \frac{x^3}{3}$ i punkten $(x, y) = (1, 0)$.

(c) $f(x, y) = (x - y)^4$ i punkten $(x, y) = (0, 0)$.

2. Låt $I = \iint_D (x^2 + y + 4) dx dy$, där D ges av $x^2 \leq -y$ och $x + y \geq -2$.

(a) Avgör, utan att beräkna integralen, om $I > 0$ eller $I < 0$ (tydlig motivering krävs).

(b) Beräkna I .

3. Låt $f(x, y) = g(x^2 + \cos y)$, där g är deriverbar.

(a) Bestäm $\nabla f(1, \pi)$ uttryckt i g och dess derivator.

(b) Bestäm $f'_v(1, \pi)$, uttryckt i g och dess derivator, då $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Antag att $g'(0) < 0$. Bestäm en enhetsvektor \bar{u} , sådan att f växer som snabbast i denna \bar{u} :s riktning i punkten $(x, y) = (1, \pi)$.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = (2 - xy)e^{-x-y}$ på den mängd i första kvadranten där $2xy \geq 3$ och $2x + y \leq 4$.

5. (a) Bestäm den allmänna C^1 -lösningen till den partiella differentialekvationen

$$2x z'_x - y z'_y = x^2 y \quad (x > 0)$$

med hjälp av variabelbytet $u = x$, $v = y\sqrt{x}$.

(b) Bestäm den lösning till ovanstående PDE som uppfyller bivillkoret $z(4, y) = 0$.

(c) Redovisa en kontroll att lösningen i (a) uppfyller PDE:n och att lösningen i (b) uppfyller både PDE:n och bivillkoret.

6. Beräkna (eller visa divergens)

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)z^2} dx dy dz,$$

där $D = \{(x, y, z) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$.

7. Avgör för vilka reella tal a och b som följande gränsvärde existerar ändligt, samt beräkna det i dessa fall:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} \frac{x^2 - 2y^3}{x^2 - ay^3}$$