Tenta TATA43/9GMA08, 2024/01/02. Lösningsskiss.

(1) $f(x,y,z)=(x+xy+yz)e^z$, stationära punkter: $f'_x=f'_y=f'_z=0$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1+y)e^z=0\\(x+z)e^z=0\\(y+x+xy+yz)e^z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\z=-x\\x-1-x+x=0\end{cases} \Leftrightarrow$$ en stationär punkt $A(1,-1,-1)$

$f''_{xx}=0$, $f''_{xy}=e^z$, $f''_{xz}=(1+y)e^z$, $f''_{yy}=0$, $f''_{yz}=(x+z+1)e^z$,

$f''_{zz}=(2y+x+xy+yz)e^z$

$\Rightarrow Q_A(h,k,l)=0\cdot h^2+2e^{-1}hk+0\cdot hl+0\cdot k^2+2e^{-1}kl+(-e^{-1})l^2=$

$=e^{-1}(2hk+2kl-l^2)$ är indefinit eftersom

t.ex. $Q_A(1,1,0)=2e^{-1}>0$, $Q_A(0,0,1)=-e^{-1}<0$.

Svar: Inga extrempunkter

---

(2) $\boxed{a)}$ $z=g(x,y)$, $\nabla z=(g'_x,g'_y)$, tangentplanet $z=-x-y$ i $(0,0,0)$ ger $g'_x(0,0)=-1$, $g'_y(0,0)=-1$, $g(0,0)=0$. Låt $f(x,y)=(2+g(x,y))^2$, så gäller att

$f(0,0)=4$ och $\frac{\partial f}{\partial x}=2(2+g(x,y))\cdot g'_x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2(2+g(x,y))g'_y$, alltså

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=4(-1)=-4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-4$, vilket ger

$z=f(0,0)+f'_x(0,0)(x-0)+f'_y(0,0)(y-0)=4-4x-4y$

Svar (a) $4x+4y+z=4$ är tangentplanet till ytan $z=(2+g(x,y))^2$ i $(0,0)$

$\boxed{b)}$ $f(x,y)=(1+2x)^{1-y}=e^{(1-y)\ln(1+2x)}=\Big/$ m.h.a. $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)\Big/$

$=\exp\left[(1-y)\left(2x-\frac{4x^2}{2}+O(x^3)\right)\right]=\Big/ r=\sqrt{x^2+y^2}\Big/=$

$=\exp\left[2x-2xy-2x^2+O(r^3)\right]=1+(2x-2xy-2x^2)+$

$+\frac{1}{2}(2x)^2+O(r^3)=1+2x-2xy-2x^2+2x^2+O(r^3)=$

$=1+2x-2xy+O(r^3)$

Svar: (b) Taylorpolynomet i origo $=1+2x-2xy$

---

(3) a) $z'_x=yz$, $z=z(x,y)$, $z'_x-yz=0 \Leftrightarrow z'_xe^{-yx}-ye^{-yx}z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ze^{-yx})'_x=0 \Leftrightarrow ze^{-yx}=g(y) \Leftrightarrow z=e^{yx}g(y)$, $g\in C^1$.

b) $u = x^2 + xy^2$, $v = y$, $z'_x = z'_u(2x+y^2) + z'_v \cdot 0$

$z'_y = z'_u(2xy) + z'_v \cdot 1$

$\Rightarrow 2xyz'_x - (2x+y^2)z'_y = 2xy(2x+y^2)z'_u - (2x+y^2)2xyz'_u - 2xyz'_v =$

$= -2xyz'_v = 0 \iff$ (Obs. $x, y > 0$) $z'_v = 0 \iff z = g(u)$,

alltså $z(x,y) = g(x^2+xy^2)$, $g \in C^1$. Bivillkoret $z(x,0) = x$ ger

$g(x^2) = x$, $g(t) = \sqrt{t}$, $g(x^2+xy^2) = \sqrt{x^2+xy^2}$, alltså

Svar $z(x,y) = \sqrt{x^2+xy^2}$, $(x, y > 0)$.

---

(4) $g(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$, $h(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ är C^1-functioner,

$g(1,1,1) = -1$, $h(1,1,1) = 6$, och till exempel

$$\begin{vmatrix} g'_x & g'_y \\ h'_x & h'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 12xy = /\text{i } (1,1,1)/ = 12 \neq 0$$

alltså definierar $g = -1$, $h = 6$ en C^1-kurva $x = x(z)$, $y = y(z)$

i en omgivning av $(1,1,1)$, där $x(1) = y(1) = 1$. Implicit derivering:

$$\begin{cases} g'_x x'(z) + g'_y y'(z) + g'_z = 0 \\ h'_x x'(z) + h'_y y'(z) + h'_z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -6z \end{pmatrix}$$

vilket ger i $(1,1,1)$:
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Tangent linjens ekvation
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Svaret. $(x,y,z) = (1+s, 1+4s, 1-3s)$, $s \in \mathbb{R}$.

---

(5) $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$; rymdpolära koordinater ger

$0 \le r \le 1$; $r\cos\theta \ge r\sin\theta \iff \tan\theta \le 1$ (obs. $\theta \in [0,\pi]$).

$0 \le \varphi \le 2\pi$. Alltså $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^1 dr \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta}{1+r^2\sin^2\theta} \right) d\theta \right)\right) = \left/ \begin{array}{l} 1+r^2\sin^2\theta = t \\ dt = 2r^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ 1 \le t \le \frac{r^2}{2}+1 \end{array} \right/ =$$

$$= \pi \int_0^1 r\,dr \int_1^{1+\frac{r^2}{2}} \frac{dt}{t} = \pi \int_0^1 r \ln\left(1+\frac{r^2}{2}\right) dr = \pi \int_1^{3/2} \ln s\, ds = \pi \Big[s\ln s - s \Big]_1^{3/2} =$$

$$= \pi\left(\tfrac{3}{2}\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} + 1\right)$$

Svar: $\frac{1}{2}\pi\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right)$

⑥ $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{2x^2+y^2}{1+(2x^2+y^2)^4}\,dxdy$ • är generaliserad ($\mathbb{R}^2$ är obegränsad),
• växlar inte tecken

Variabelbytet $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \frac{d(x,y)}{d(\rho,\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$ ger

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{1+\rho^8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\,d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\rho^3\,d\rho}{1+\rho^8} = \left| \begin{array}{l} \rho^4 = t \\ dt = 4\rho^3 d\rho \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \lim_{R\to\infty} \int_0^{R^4} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\cdot\lim_{R\to\infty} \left[\arctan t\right]_0^{R^4} = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8}$$

---

⑦ $f(x,y) = x^2 y e^{-x^2-2y^2}$

• $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{array} \right| = \lim_{r\to\infty} r^3 \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{2}} e^{-r^2} = 0$ (hastighetstabellen)

$\Rightarrow$ till varje $\varepsilon > 0$ existerar $R(\varepsilon) > 0$ sådan att $|f(x,y)| < \varepsilon$ för alla (x,y) : $x^2+y^2 \geq R^2(\varepsilon)$

• Stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = (2xy - 2x^3y)e^{-x^2-2y^2} = 0 \\ f'_y = (x^2 - 4y^2x^2)e^{-x^2-2y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ • $(0,t)\ \forall t\in\mathbb{R}$
• $(\pm 1 ; \pm\frac{1}{2})$ (alla fyra möjligheter)

$f(\pm 1, \frac{1}{2}) = \underline{\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}}$, $f(\pm 1 ; -\frac{1}{2}) = \underline{-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}}$, $f(t,0) = \underline{0}$

• Låt $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$ och $R_0 = R(\varepsilon_0)$, då gäller för alla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sådana att $x^2+y^2 \geq R_0^2$ att $|f(x,y)| < \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}}$. Enligt vårt antagande, gäller det att $|f(x,y)| < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ för $x^2+y^2 \geq R_0^2$. Å andra sidan, $f(\pm 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ och $f(\pm 1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ är stationära punkter som ligger inom kompakta området $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R_0^2\}$. Som kontinuerlig function, antar $f(x,y)$ sitt största/minsta värde i D. Observera att $|f(x,y)|$ är mindre än $\frac{1}{2}e^{-3/2} \Rightarrow$ uppnås största resp. minsta värde i inre punkter av $D \Rightarrow$ stationära punkter. Men enligt ovan, så finns bara 4 icke-triviala kandidater (d.v.s. för vilka $f \neq 0$). Alltså $\max_D f = \frac{1}{2}e^{-3/2}$, $\min_D f = -\frac{1}{2}e^{-3/2}$.

Slutligen, eftersom $|f| < \frac{1}{4}e^{-3/2}$ i $\mathbb{R}^2 \setminus D$, drar vi slutsats att $\frac{1}{2}e^{-3/2} = \max_{\mathbb{R}^2} f$ och $-\frac{1}{2}e^{-3/2} = \min_{\mathbb{R}^2} f$ i hela planet, vilket skall bevisas.

Svar: Se ovan