Lösningsförslag: Tenta TATA43/9GMA08, 2023-06-01

(1) De tre partiella derivatorna är $f'_x = 4xz-4x$, $f'_y = -2y-2$, $f'_z = 2x^2-4z-4$. Ekvationen $f'_y = 0$ ger $y=-1$, och $f'_x = 4x(z-1)=0$ ger antigen $x=0$ eller $z=1$. Substitution dessa alternativen i $f'_z = 2x^2-4z-4=0$ ger resp. $\begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases}$ och $\begin{cases} z=1 \\ x^2=4 \end{cases}$, d.v.s. stationära punkter är $(0,-1;-1)$, $(-2;-1;1)$, $(2;-1;1)$.

Andraderivator: $f''_{xx} = 4z-4$, $f''_{xy} = 0$; $f''_{xz} = 4x$; $f''_{yy} = -2$; $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = -4$.

a) I punkten $(0,-1,-1)$ den kvadratiska formen är

$$Q_{(0,-1,-1)}(h,k,l) = -8h^2 - 2k^2 - 4l^2$$ är negativt definit, och

$(0,-1,-1)$ är således en lokalmaximipunkt.

b) I punkten $(-2;-1;1)$ den kvadratiska formen är:

$$Q(h,k,l) = -2k^2 - 16hl - 4l^2$$ är <u>indefinit</u>, ty:

$Q(0;0;1) = -2 < 0$; $Q(-1;0;1) = 12 > 0$, ingen extrempunkt

c) I punkten $(2;-1;1)$ den kvadratiska formen är:

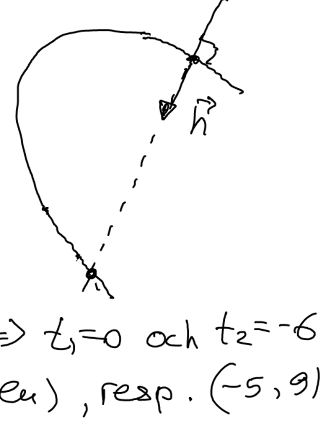
$$Q(h,k,l) = -2k^2 + 16hl - 4l^2$$ är indefinit, ty

$Q(0,0,1) = -2$ och $Q(1,0,1) = 12 > 0$, ingen extrempunkt

<u>Svar</u>: Punkten $(0,-1,-1)$ är lokalt maximipunkt, lokalt minimipunkter saknas

---

(2) Kurvan kan skrivas som nivåkurvan $F(x,y) = y^2 - 3x^2 - 6 = 0$, där $F(1,3) = 9-3-6=0$. Normalinjen till kurvan i punkten $(1,3)$ har riktningsvektor $\vec{n} \parallel \nabla F(1,3) = (-6;6)$, så vi kan ta $\vec{n} = (1,-1)$. Normallinjen ges därför av $\vec{X} = \binom{1}{3} + t\vec{n}$, d.v.s $(x,y) = (1+t, 3-t)$, och den skär kurvan precis där

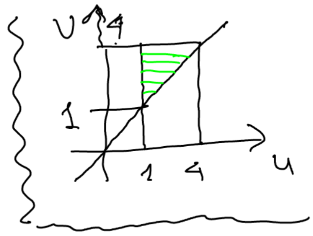


$0 = F(1+t, 3-t) = 9-6t+t^2-3-6t-3t^2-6 = -12t-2t^2 = 0 \iff t_1=0$ och $t_2=-6$, som ger punkterna $(1,3)$ (som ju är startpunkten), resp. $(-5,9)$

<u>Svar</u> $(-5,9)$

③ Ett lämpligt variabelbyte är $u = x+y$, $v = 2x-y$. Funktionaldeterminanten blir $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$, alltså $\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{3}$. Integralen efter variabelbytet $\left(x = \frac{u+v}{3}\right)$ blir således

$$I = \iint_E \frac{u+v}{3\cdot 3\cdot u}\,du\,dv \quad , \text{ där } E \text{ ges av } 1 \le u \le v \le 4.$$



Itererad integration ger nu

$$I = \frac{1}{9}\int_1^4 \left(\int_u^4 \frac{u+v}{u}\,dv \right) du = \frac{1}{9}\int_1^4 \left[v + \frac{v^2}{2u} \right]_u^4 du =$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(4 - \frac{3}{2}u + \frac{8}{u}\right) du = \frac{1}{9}\left[4u - \frac{3}{4}u^2 + 8\ln|u|\right]_1^4 = \frac{1}{12} + \frac{16}{9}\ln 2$$

Svar $I = \frac{1}{12} + \frac{16}{9}\ln 2$

---

④ $f(x,y,z) = x - z^2$ är kontinuerlig och mängden som ges av $g = x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $h = z \ge 0$ är en kompakt (slutet halvklot) $\Rightarrow$ f har största/minsta värde på mängden. Kandidatjakt:

1) 3D inre punkter: $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = 0 \\ g < 1 \\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 0, -2z) = (0,0,0) \\ g < 1 \\ h > 0 \end{cases}$

har ingen lösning $\Rightarrow$ kandidater här saknas

2) 2D (halvsfär) $\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g = 1 \\ h > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2z \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (eftersom $z>0$) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ z^2 = \frac{3}{4},\ z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ en kandidat}}$

3) 2D (halvcirkelskiva) $\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla h \\ g < 1 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ g < 1,\ h = 0 \end{cases}$

$\emptyset$

har inga lösningar

4) 1D ("hörnpunkter") $\begin{cases} (\nabla f, \nabla g, \nabla h) \text{ linjärt beroende} \\ g = 1,\ h = 0 = z \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y = 0 \Rightarrow \text{insatt i } g = 1 \text{ ger } x^2 = 1$$

alltså två kandidater till: $(\pm 1; 0; 0)$

Optimering: $f(1,0,0) = 1$, $f(-1,0,0) = -1$, $f\left(-\frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{4}$.

Svar $f_{max} = f(1,0,0) = 1$, $f_{min} = f\left(-\frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{4}$.

(5) $xz''_{xx} - yz''_{xy} + z'_x = 2xy$, $u = xy$, $v = y$. Kedjeregeln ger

$z'_x = z'_u y$, $z'_y = z'_u x + z'_v$, $z''_{xx} = (z'_u y)'_x = y(z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$

och $z''_{xy} = (z'_u y)'_y = z'_u + y(z'_u)'_y = z'_u + y(z''_{uu}x + z''_{uv})$, som

insatt i den ursprungliga PDE ger $-y^2 z''_{uv} = 2xy$, eller

$z''_{uv} = -\frac{2x}{y} = -\frac{2u}{v^2}$. Integration ger först $z'_u = \frac{2u}{v} + g(u)$,

och sedan $z = \frac{u^2}{v} + G(u) + H(v) = \frac{(xy)^2}{y} + G(xy) + H(y)$

där G, H är C^2-funktioner av en variabel.

Svar: $z(x,y) = x^2y + G(xy) + H(y)$.

---

(6) (a) $f(x,y)$ är differentierbar i en inre punkt (a,b) av definitionsmängden om existerar reella talen A, B sådana att

$(*)$ $f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \omega(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$, där $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = 0$

(b) Från $(*)$: $f(a+h,b) - f(a,b) = Ah + \omega(h,k)|h| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = A + \omega(h,0)\frac{|h|}{h} \longrightarrow A$ då $h \to 0$

$\left(\left|\frac{|h|}{h}\right| = 1 \Rightarrow \right.$ begränsad och $\omega(h,0) \to 0$ då $\left. h \to 0 \right)$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ existerar och $= A$.

Analogt: $\exists \; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = B$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+3y^3-yx^3}{3x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Eftersom $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h}{3} - 0}{h} \to \frac{1}{3}$, då $h \to 0$, och

$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{3k}{k} \to 3$, då $k \to 0$, ser vi att

$f'_x(0,0) = \frac{1}{3}$, $f'_y(0,0) = 3$. Om $f(x,y)$ är differentierbar i origo gäller alltså att

$\omega(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{1}{3}h - 3k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

Men $\omega(h,k) = \frac{-kh^3 - 9kh^2 - \frac{1}{3}hk^2}{(3h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$, så t.ex. $\omega(h,h) = \frac{-\frac{28}{3}h^3 - h^4}{4h^2|h|} \to -\frac{7}{3}$

då $h \to 0^+$ och (se $\to$)

$$w(-h,h) = \frac{h^4 - \frac{26}{3}h^3}{4h^2|h|} \to -\frac{26}{3} \quad \text{da } h \to 0^+, \text{ och därmed}$$

existerar <u>inte</u> ens $\lim_{(h,k)\to(0,0)} w(h,k)$.

<u>Svar</u>: (c) f är <u>inte</u> differentierbar i origo.

---

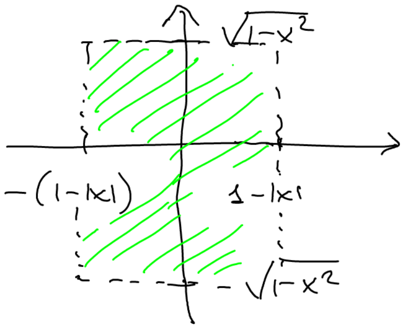
⑦ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \le 1\}$.

Integration med skivor i x-riktning ger

$$D_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : |z| \le \sqrt{1-x^2}, \ |y| \le 1 - |x|\}$$

— en rektangel i (y,z)-planet

där $-1 \le x \le 1$:



$$\text{Vol} = \int_{-1}^{1} \Big(\iint_{D_x} dy\,dz \Big) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \text{Area}(D_x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} \big(2\sqrt{1-x^2}\big)\big(2(1-|x|)\big)\, dx =$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} (1-|x|)\sqrt{1-x^2}\, dx = 4 \cdot 2 \int_{0}^{1} (1-x)\sqrt{1-x^2}\, dx = \Big/ \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) \cdot \cos^2 t \cdot dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt - 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt =$$

$$= 8 \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 8 \Big[\frac{\cos^3 t}{3} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

<u>Svar</u>: Volymen $= 2\pi - \frac{8}{3}$.