Tenta TATA43/9GMA08, 2022-10-27

Lösningsförslag

(1) $f'_x = 2x+4y=0$, $f'_y = 2y+4x+3y^2=0$ ger $x=-2y$ och $-6y+3y^2=0$ dvs: stationära punkter $(0,0)$ och $(-4,2)$. Andra derivatorna:

$$f''_{xx}=2, \quad f''_{xy}=4, \quad f''_{yy}=2+6y.$$

- Punkten $(0,0)$: $Q(h,k)=2h^2+8hk+2k^2=2(h+2k)^2-6k^2$ är indefinit, t.ex. $Q(-2,1)=-6<0$ och $Q(1,0)=2>0$, dvs $(0,0)$ är varken lok. maximipunkt eller minimipunkt.
- Punkten $(-4,2)$: $Q(h,k)=2h^2+8hk+14k^2=2(h+2k)^2+6k^2$, d.v.s $Q(h,k)>0$ för alla punkter $(h,k)\neq(0,0)$, alltså är $Q(h,k)$ positivt definit dvs $(-4,2)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: $(-4,2)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

---

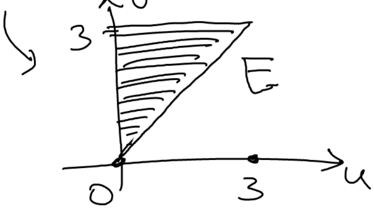
(2) Sätt $F(x,y,z)=x^2-y^2-z^4$, $\nabla F(a,b,c)=(2a,-2b,-4c^3)$ parallell med $(1,1,2)$ ger $(2a,-2b,-4c^3)\times(1,1,2)=(0,0,0)$ alltså: $-4b+4c^3=0$, $-4c^3-4a=0$, $2a+2b=0$. $\iff$

$\iff$ $a=-b=-c^3$, som insatt i ytans ekvation ger $c^6-c^6-c^4=-1$, alltså $c^4=1 \iff c=\pm1$. Tangeringspunkter är alltså $(1;-1;-1)$ och $(-1,1,1)$ med motsvarande tangentplan $x+y+2z=2$ och $x+y+2z=-2$.

Svaret. Se ovan

---

(3) Linjärt variabelbyte $u=x+y$, $v=x-2y$ som ger $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3$ alltså $dxdy=dudv/3$, och ny triangel E ger:



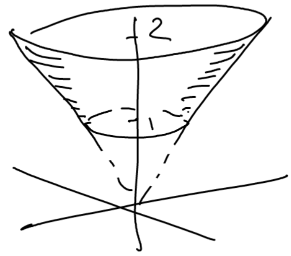
$$\iint_D (x+y)e^{(x-2y)^3}\,dxdy=\iint_E ue^{v^3}\,\frac{dudv}{3}=$$

$$=\int_0^3 \frac{e^{v^3}}{3}\left(\int_0^v u\,du\right)dv=\int_0^3 \frac{v^2e^{v^3}}{6}\,dv=\left/\begin{matrix}t=v^3\\ dt=3v^2dv\end{matrix}\right/=\int_0^{27}\frac{e^t}{18}\,dt=\frac{e^{27}-1}{18}$$

Svar: $I=\frac{1}{18}(e^{27}-1)$

(4) Skivor i z-led med planpolära koordinater ger

$1 \le z \le 2$, $0 \le \rho \le z$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.



$$\iiint_D \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z \frac{z\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, d\rho \right) d\varphi \right) dz$$

$$= 2\pi \int_1^2 z \left(\int_0^z \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \right) dz = \left/ \begin{matrix} \rho^2+z^2 = t \\ 2\rho\, d\rho = dt \end{matrix} \right/ = \frac{2\pi}{2} \int_1^2 z \cdot \int_{z^2}^{2z^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \pi \int_1^2 z \left[2\sqrt{t} \right]_{z^2}^{2z^2} = 2\pi \int_1^2 (\sqrt{2}-1) z^2\, dz = 2\pi(\sqrt{2}-1)\frac{8-1}{3}$$

Svar: $\frac{14\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

---

(5) $z'_x = y z'_u$, $z'_y = x z'_u + z'_v$, $\quad (x = u/v,\ y = v)$

$z''_{xx} = (y z'_u)'_x = y (z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$

$z''_{xy} = (y z'_u)'_y = z'_u + y (z'_u)'_y = z'_u + y(x z''_{uu} + z''_{uv})$

insatt i ekvationen ger $-y^2 z''_{uv} = 4x$, dvs. $z''_{uv} = -\frac{4u}{v^3}$

$\Rightarrow z'_u = \frac{2u}{v^2} + f(u)$, $z = \frac{u^2}{v^2} + F(u) + g(v) = x^2 + F(xy) + g(y)$.

- Bivillkoret $z(x,x) = x^2$ ger $\underline{x^2 = x^2 + F(x^2) + g(x)} \Rightarrow F(t) = -g(\sqrt{t})$.
- bivillkoret $z(0,y) = y$ ger $y = F(0) + g(y)$, alltså

$g(t) = t - F(0)$, och $F(t) = -\sqrt{t} + F(0)$ som i sin tur ger:

$$z(x,y) = x^2 + F(xy) + g(y) = x^2 + (-\sqrt{xy} + F(0)) + (y - F(0)) = x^2 + y - \sqrt{xy}.$$

<u>Svar:</u> $z(x,y) = x^2 + y - \sqrt{xy}$.

---

(6) Sätt $F(x,y,z) = x + e^y + \ln z$, $G(x,y,z) = e^x + \ln y + z$. Då utgörs lösningarna till ekvationssystemet av skärningskurvan mellan nivåytorna $F(x,y,z) = e$, $G(x,y,z) = 2$. Eftersom $F(0,1,1) = e$, $G(0,1,1) = 2$, F och G är C^1-funktioner och

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^y & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} & 1 \end{vmatrix} = e^y - \frac{1}{zy} = \Big/ \text{i punkten } (0,1,1) \Big/ = e - 1 \neq 0,$$

så ger implicita funktionssatsen att ekvationssystemet $F = e$, $G = 2$ i någon omgivning av $(0,1,1)$ definierar C^1-funktioner $y(x)$ och $z(x)$.

$\Rightarrow y(0) = 1$ och $z(0) = 1$.

Implicit derivering med avseende på x ger sedan

$$\begin{cases} 1 + e^y y'(x) + \frac{1}{z} z'(x) = 0 \\ e^x + \frac{1}{y} y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases}, \quad \text{alltså} \quad y'(x) = \frac{ye^x - zy}{yze^y - 1}, \quad z'(x) = \frac{z - zye^{x+y}}{yze^y - 1},$$

alltså $y'(0) = 0$, $z'(0) = -1$.

Eftersom $z'(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ saknar $z(x)$ lokal extremvärde i $x=0$, medan $y(x)$ eventuellt har den. Från uttrycket $y'(x) = \dfrac{ye^x - zy}{yze^y - 1}$ ser vi att $y(x)$ till och med är C^2 (eftersom högerledet är C^1) och vi kan därför derivera den en gång till:

$$y''(x) = \frac{(y'e^x + ye^x - z'y - zy')\cdot(yze^y - 1) - (ye^x - zy)(y'ze^y + yz'e^y + yze^y)}{(yze^y - 1)^2}$$

$$y''(0) = \left| \begin{array}{l} \text{eftersom} \\ y(0) = z(0) = 1 \\ y'(0) = 0,\ z'(0) = -1 \end{array} \right| = \frac{2}{e-1} > 0$$

så har $y(x)$ lokalt minimum i $x=0$

Svar: Se ovan; $z(x)$ saknar extremvärde i $x=0$
$y(0)$ har lokalt minimum i $x=0$

---

(7) Eftersom $f(x,0) = 0$ för alla x, $f(0,y) = 0$ för alla y ser vi till att börja med att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.

När $y \neq 0$ ger vanliga deriveringsregler att $f'_x(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^4}$ och eftersom t.ex. $f'_x(0,t) = 1 \to 1 \neq 0 = f'_x(0,0)$ då $t \to 0$ ser vi att $f'_x(x,y)$ inte är kontinuerlig i $(0,0)$ och därmed är $f(x,y)$ inte av klass C^1.

Vidare: eftersom $|\arctan t| < \frac{\pi}{2}$ för alla t får vi:

$|f(x,y)| \leq y^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ (även när $y=0$!) och därmed också

$|f(x,y)| \leq (y^2 + x^2)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\rho^2$, så

$$\left| \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{\rho^2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\rho} = \frac{\pi}{2}\rho \to 0$$

då $\rho \to 0$ (och φ varierar fritt), så f är differentierbar i $(0,0)$.

Svar: Se ovan.