Lösningsförslag. Tenta TATA43/9GMA08: 2023-01-05

(1) De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x^2-2x+4y=0$ och $f'_y=-4y+4x=0$, d.v.s. $x=y$ som insatt i den 1:a ekvationen ger $2x^2+2x=0$, d.v.s. $x_1=0$ och $x_2=-1$. De stationära punkterna är således $(0,0)$ och $(-1,-1)$.
Andraderivatorna blir $f''_{xx}=4x-2$, $f''_{xy}=4$, $f''_{yy}=-4$.

- $(0,0)$: den kvadratiska formen

$$Q_{(0,0)}(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = -2h^2+8hk-4k^2 = -2(h^2-4hk+2k^2) =$$

$$= -2\left((h-2k)^2-2k^2\right),$$ indefinit eftersom t.ex. $Q(2,1)=4>0$ och $Q(0,1)=-4<0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för $f(x,y)$

- $(-1,-1)$:

$$Q_{(-1,-1)}(h,k) = -6h^2+8hk-4k^2 = -4\left(k^2-2hk+\tfrac{3}{2}h^2\right) = -4\left((k-h)^2+\frac{h^2}{2}\right)$$

som är negativ för alla $(h,k)\neq(0,0)$, alltså $Q_{(-1,-1)}(h,k)$ är negativt definit $\Rightarrow$ $(-1,-1)$ är en lokal maximipunkt för f

Svar: $(-1,-1)$ är en lokal maximipunkt för f, lok. minimipunkter saknas

---

(2) För att bestämma de punkter där linjen skär ytan sätter man in $x=1+t$, $y=-t$, $z=2$ i ytans ekvation och löser ut t:

$$0 = f(x,y,z) = xz^2+x^2-xy-4y = (1+t)4+(1+t)^2+(1+t)t+4t =$$

$$= 2t^2+11t+5,$$ alltså $t=-\frac{1}{2}$ eller $t=-5$,

vilket ger punkterna: $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2)$ and $(-4,5,2)$.

Ur $\nabla f(x,y,z) = (z^2+2x-y\,;-x-4\,;2xz)$ fås

$\nabla f(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2) = (\frac{9}{2};-\frac{9}{2};2)$ och $\nabla f(-4,5,2) = (-9;0;-16)$,

så vi kan ta $(9,-9,4)$ och $(9;0;16)$ som normalvektorer till tangentplanet i respektive punkt.

Svar: tangentplanet i $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2)$ är $9x-9y+4z=8$

i $(-4,5,2)$ är $9x+16z=-4$

---

(3) Integralen är generaliserad ($f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y+yx^2}}$ är obegränsad i $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<\frac{1}{1+x^2},\ 0\le x\le 1\}$.), integranden $f(x,y)$ är positiv, d.v.s. så vi kan använda variabelbyte m.m.

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy \;=,$$ där $D_\varepsilon = \{(x,y):\ \varepsilon<y<\frac{1}{1+x^2},\ 0\le x\le 1\}$

$$\overset{①}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \left(\int_\varepsilon^{\frac{1}{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+x^2}}\, dy \right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[2\sqrt{y} \right]_\varepsilon^{\frac{1}{1+x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2\arctan x - 2\sqrt{\varepsilon}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Svar $I = \frac{\pi}{2}$, konvergent

---

④ Integration av den 1:a ekvationen m.a.p. x ger $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + g(y,z)$ och derivering av $u(x,y,z)$ m.a.p. y och insättning i den 2:a ekvationen ger:

$$u'_y(x,y,z) = 4x\sin y\cos y + g'_y(y,z) \overset{②}{=} \underbrace{2x\sin 2y}_{4x\sin y\cos y} - z\sin y,$$

$$\Leftrightarrow \quad g'_y(y,z) = -z\sin y,$$

alltså $g(y,z) = z\cos y + h(z)$, vilket ger

$u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + h(z)$, och bivillkoret ger

nu $x = u(x,0,x) = 0 - x^2 + x + h(x) \Leftrightarrow h(x) = x^2$, alltså

$h(z) = z^2$ och därmed

Svar: $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + z^2$

---

⑤ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$,

$h(x,y,z) = x-2y-z$ är kontinuerliga. Villkoren $g(x,y,z) \le 12$ och $h(x,y,z) \ge 0$ beskriver en sluten mängd $\Rightarrow$ största/minsta värde finns. Optimering:

(3D) $\{g<12, h>0\}$ samt $\nabla f(x,y,z) = (2x-2, 2y+2, 2z+2) = \bar{0}$

$\Rightarrow (1,-1,-1)$, där $g(1,-1,-1) = 3 < 12$ och $h(1,-1,-1) = 4 > 0$,

alltså är $(1,-1,-1)$ en kandidat med $\boxed{f(1,-1,-1) = -3}$

(2D) $\{g=12, h>0\}$ samt $\nabla g \parallel \nabla f$ ger

$$\nabla g \times \nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-2 & 2y+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y+2 & 2z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 2z+2 & 2x-2 \end{vmatrix} = 0$$

vilket tillsammans med $g=12$, $h>0$ ger systemet:

$$\begin{cases} y = z = -x \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x-2y-z>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \pm(2,-2,-2).$$

$h(-2,2,2) = -8 < 0 \Rightarrow$ ingen kandidat

$h(2;-2,-2) = 8 > 0 \Rightarrow$ en kandidat, $\boxed{f(2,-2,-2)=0}$

(2D) $\{g<12,\ h=0\}$ samt $\nabla h \parallel \nabla f$ ger analogt

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2x-2 & 2y+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2y+2 & 2z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2z+2 & 2x-2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2x=1 \\ x=-z \\ x-2y-z=0 \\ g(x,y,z)<12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) \\ g\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} < 12 \quad \text{OK} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}} \text{ en kandidat}$$

(1D) $g=12,\ h=0$ samt $(\nabla f, \nabla g, \nabla h)$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2x-2 & 2y+2 & 2z+2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2x & 2(y+x) & 2(z+x) \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \text{ ger kandidaterna } \boxed{\begin{aligned} f(2,2,-2) &= 8 \\ f(-2,-2,2) &= 16 \end{aligned}}$$

Sammantaget blir:

Svar: $\begin{cases} f_{max} = f(-2,-2;2) = 16 \\ f_{min} = f(1,-1,-1) = -3 \end{cases}$

---

(6) M.h.a. rymdpolära koordinater:

- $x^2+y^2+z^2 \le 1 \Leftrightarrow \boxed{0 \le r \le 1}$
- $z^2 \ge 3(x^2+y^2) \Leftrightarrow \cos^2\theta \ge 3\sin^2\theta \Leftrightarrow \cos^2\theta \ge \frac{3}{4}$.
- $z \le 0 \Leftrightarrow \cos\theta \le 0$ tillsammans med $\cos^2\theta \ge \frac{3}{4}$ ger

$$-1 \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\pi \ge \theta \ge \frac{5\pi}{6}}$$

- $x \ge 0,\ y \ge 0$ ger $\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \left(\int_0^1 r\sin\theta\cos\varphi \cdot r\sin\theta\sin\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4 \cdot 16} = -\frac{1}{768}$$

Svar: $-\frac{1}{768}$ (obs, $xyz < 0$ i D)

(7) a) $F(x,y) = \sin(x^2y) - y^3 + 1 \in C^1$

$F(0,1) = 0$

$F'_y = x^2\cos x^2y - 3y^2$, $F'_y(0,1) = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ $F(x,y) = 0$ definierar i en omgivning av $(0,1)$ en C^1-funktion $y = y(x)$

Och: $y(0) = 1$, $y'(0) = -\dfrac{F'_x(0,1)}{F'_y(0,1)} = 0$

b) $y'(x) = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\dfrac{2xy\cos(x^2y)}{x^2\cos x^2y - 3y^2}$, där $y(x)$ är en C^1-funktion nära $x=0$.

$\Rightarrow$ $y'(x)$ är C^1 i en omgivning av $x=0$, vilket betyder per definition att $y(x)$ är C^2 i samma omgivning.

c) $y'(0) = 0 \Rightarrow x=0$ är en stationär punkt.

$$y'' = -\frac{\left(2y\cos(x^2y) + 2xy'\cos x^2y - 2xy\cdot\sin(x^2y)\cdot(2xy + x^2y')\right)}{x^2\cos(x^2y) - 3y^2} +$$

$$+ \frac{2xy\cos(x^2y)}{(x^2\cos x^2y - 3y^2)^2}\cdot\left(2x\cos x^2y - x^2\sin(x^2y)\cdot(2xy + x^2y') - 6yy'\right)$$

Eftersom $x=0$, $y=1$, $y'(0)=0$, så finner man att

$y''(0) = -\dfrac{2}{(-3)} + 0 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y''(0) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 0 \text{ är lokal minimipunkt}}$

<u>Svar:</u> Se ovan.

c) $x=0$ är en lokal minimipunkt för $y = y(x)$.