Modul A

Funktioner i vektoranalys: vektorfält, kurvor och ytor

Föreläsning A

A.1 Introduktion

Följande länk ger en kort översikt av kursen och administrativa detaljer.

Film A.1: `https://youtu.be/lKfQmrcnDKM`

När man ser den här symbolen kan man klicka på länken för att titta på en videoklipp.

I Kurs-PM hittar du alla detaljerna i skriftlig form. Kurs-PM finns på kurshemsidan via följande länken:

`https://courses.mai.liu.se/GU/TATA44/Dokument/coursedoc.pdf`

Bilden ändra sig beroende på vad länken pekar till.

Föreläsningar kommer mest följa *Ramgard* och i första föreläsning går vi igenom kapitel 1–3. För att kunna få tillgång till de flesta lektions uppgifter behöver du också köpa *Nikoltjeva-Hedberg*. Se kurs-PM för detaljerna. Båda går att köpa från bokhandeln på campus:

`www.bokab.net`

Bland de här anteckningar och på kurshemsidan finns det länkar till videoklipp som till exempel introduktionen ovan. Videoklippen utgör inspelade föreläsningar och anteckningarna är en skriftlig underlag som är förhoppningsvis lättare att bläddra igenom än videoklipp. Noterar att **första bilden i vissa videoklipp inte stämmer med dess rubrik**, men man kan alltid vara säkert den är den rätta videon genom att kontrollera rubriken med länken i anteckningarna eller hemsidan man klickar på. Anledningen bakom detta är att jag har ändrat ordningen av vissa videoklipp i kursen jämfört med förra året.

Ämnet utvecklades för att behandla och lösa fysiska problem – framför allt i elektromagnetism – och det är därifrån vi mest kommer motivera vår studier. I vektoranalys kan man mer än i vissa andra matematiska ämne dra mycket nyttja av bra intuition. Men det inte skulle vara en högskoleutbildning utan bevis.

A.2 Funktioner

Funktioner spelar en central roll i vektoranalys. Vi använder de för att representera på ett matematiskt sätt en rad olika fysiska saker. Men först kommer vi håg detta grundläggande begrepp: En *funktion* f är en regel som till varje element x i en mängd A hanför ett element i en mängd B. Vi kallar A för funktions *definitionsmängd* och B för funktionens *målmängd*. och skriver $f\colon A \to B$.

Exampel A.1. *Kom ihåg från envariabelanalys både A och B var oftast lika med $\mathbf{R}$ eller en delmängd av $\mathbf{R}$. Till exempel har vi följande funktioner.*

(a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, som till varje* $x \in \mathbf{R}$ *hanför talet* $f(x) = x^2 + 2$.

(b) $f\colon [0,3] \to \mathbf{R}$*, som till varje* $x \in [0,3]$ *hanför talet* $f(x) = x - \frac{3}{4}$.

Vi har också sett i flervariabelanalys funktioner där A är en delmängd av

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y)\colon x,y,\in \mathbf{R}\}$$

eller

$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)\colon x,y,z \in \mathbf{R}\}.$$

(Så $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$ är mängderna av alla koordinater med 2 respektive 3 komponenter.)

Exampel A.2. *Här ger vi ett par exempel av funktion med definitionsmängd $\mathbf{R}^2$ eller $\mathbf{R}^3$.*

(a) $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*, som till varje* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *kopplas talet* $F(x,y) = xy$.

(b) $G\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*, som till varje* $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *kopplas talet* $G(x,y) = 2x - 3y$.

(c) $H\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$*, som till varje* $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ *kopplas talet* $H(x,y,z) = xy + yz + zx$.

En intressant fråga är hur man kan representera funktioner grafiskt. Ni kan säkert rita grafer av funktionerna som ges i exempel A.1. För de första två i exempel A.2 kan man försöka rita en graf med tre axlar, men det är förstås inte alltid lät på pappret som egentligen är bara tvådimensionellt. Sista exempel är även svårare. I flervariabelanalys har ni jobbat med olika sätt att representera sådana funktioner och använt till exempel *nivåmängder* och *nivåkurvor*.

Med en *nivåmängd* för en funktion $f\colon A \to \mathbf{R}$ menas mängden av alla $x \in A$ för vilka f antar något givet värde $c \in \mathbf{R}$:

$$N_c = \{x \in A\colon f(x) = c\}.$$

För olika c kan N_c vara olika mängden. Om $A \subseteq \mathbf{R}^3$ är N_c i många fall en *yta* och då kallas N_c för en *nivåyta* och om $A \subseteq \mathbf{R}^2$ är N_c i många fall en *kurva* och då kallas N_c för en *nivåkurva*. Vi ger en mer konkret definition av vad en yta och en kurva är för någonting senare i det här modulen.

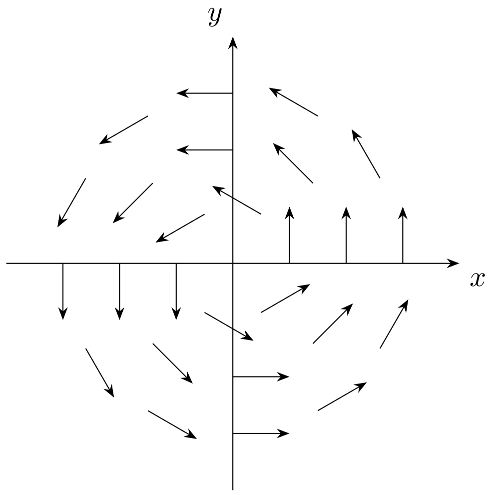
Kom ihåg även hur man kan derivera och integera sådana funktioner. Viktiga begrepp där är partiella derivator, dubbel- och trippelintegraler.

Vektorfält

I det här kursen ägnar vi mycket tid åt studien av funktioner $f\colon A \to B$ där både definitionsmängden A och målmängden B är delmängder av antingen $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$. Vi skriver $\mathbf{R}^n$ istället för $\mathbf{R}^2$ eller $\mathbf{R}^3$ där det vi pratar om gäller likväl för den ena som den andra.

Sådana funktioner representerar många viktiga fysiska begrepp. Till exempel kan man modellera ett rum (till exempel ett tentasal) som en delmängd R av $\mathbf{R}^3$ – varje punkt i rummet ges av en koordinat $(x,y,z) \in R$. Sedan kan en funktion $F\colon R \to \mathbf{R}^3$ beskriver lufthastigheten i varje punkt i rummet.

Men när vi tänker på lufthastigheten – som i en given punkt är ett element i $\mathbf{R}^3$ – slutar vi tänka på den som en koordinat och istället tänker på den som en vektor. Rent matematisk är en vektor $\mathbf{v}$



Figur A.1: En representation av funktionen G från exempel A.3.

ingen mer än ett element i $\mathbf{R}^3$ men det tolkas istället som en pil som börjar i origo och har sin spets i en punkt $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$. Punkten $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$ beskriver allt vi behöver veta om pilen så vi skriver $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

En funktion $F\colon R \to \mathbf{R}^n$ där $B \subseteq \mathbf{R}^n$ kallas för ett *vektorfält* eftersom för varje $\mathbf{x} \in R$ är $F(\mathbf{x})$ en vektor.[1].

Vi kan representerar vektorfältet F grafisk genom att representerar definitionsmängden D som en del av pappret och sedan ritar vektorn $F(\mathbf{x})$ med sin svans i punkten $\mathbf{x}$. I praktiken kan man förstås inte rita pilar i alla punkter och fallet $n = 3$ är svårare en fallet $n = 2$, men det fungerar oftar bra även med de där begränsningar. Kom ihåg att alla förflyttningar av pilen tolkas som samma vektor. Det vill säga vektorn är bara pilens *storlek* (eller magnitud) och *riktning*, inte sin placering.

Exampel A.3. *Vi definierar* $G\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ *med hjälp av uttrycket*

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Figur A.1 visa hur vi kan rita G. Ritningen passar den fysisk tolkningen av ett vektorfält.

Senare i kursen kommer vi använda funktioner för att hjälpa oss representera både kurvor och ytor.

Vi kommer ihåg notation vi har sett i linjär algebra och flervariabelanalys. Vi använder oss ofta av enhetsvektorerna $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ och $\mathbf{k}$: I $\mathbf{R}^2$ är

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{j} = (0, 1),$$

och i $\mathbf{R}^3$ är

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Med hjälpa av den notation kan vi till exempel skriva vektorfältet G från exempel A.3 som

$$G(x, y) = G_1(x, y)\mathbf{i} + G_2(x, y)\mathbf{j}$$

där $G_1\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ och $G_2\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^2$ definieras enligt formlerna

$$G_1(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{och} \quad G_2(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Film A.2: `https://youtu.be/2fqSMO2KasM`

[1]Så $\mathbf{x}$ är lika med (x, y) eller (x, y, z) för $n = 2$ respektive $n = 3$ $(x, y, z \in \mathbf{R})$

Skalärprodukt

I linjär algebra har vi lärt oss om skalärprodukten. *Skalärprodukten* av två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

För två vektorfält $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ kan man förstås ta skalärprodukten av de punktvis:

$$\mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{G}(x) = F_1(x)G_1(x) + F_2(x)G_2(x) + F_3(x)G_3(x)$$

för varje x i $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$:s definitionsmängd, där $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ och $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ så G_k och G_k $(k = 1, 2, 3)$ är komponentfunktioner av $\mathbf{F}$ respektive $\mathbf{G}$.

Skalärfält

En funktion $F\colon R \to \mathbf{R}$ där $B \subseteq \mathbf{R}^n$ kallas för ett *skalärfält*. Exempelvis kan en sådan funktion representerar temperaturfördelningen i en kropp, tryckfördelningen i en vätska eller potentialen kring en elektrisk laddning. Vi såg några exempel av skalärfält i exempel A.2.

A.3 Kurvor och ytor

Kurvor

De flesta av oss har en bra känsla för vad en kurva är för någonting. Den är någonting man kan rita på papper, eller strecka ut i luften med ett tomtebloss. Men hur representerar vi den matemematiskt? Återigen använder vi begreppet av en funktion: Betrakta en kontinuerlig funktion $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$, där $[a, b]$ är ett intervall. Man kan tänka att γ ”ritar” en kurva i $\mathbf{R}^n$, så vi säger att en *kurva* är värdemängden $\{\gamma(t)\colon t \in [a, b]\}$ av en kontinuerlig funktion $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Med andra ord är en kurva en kontinuerlig avbildning av intervallet $[a, b]$ i $\mathbf{R}^n$.

För varje kurva finns det flera möjliga val av funktion γ vars värdemängd är kurvan, så vi kalla varja funktion γ för en *parametrisering* av kurvan.

Exampel A.4. *Hitta två parametriseringer av mängden* $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$.

Lösning. Vi vet att mängden är den överst halvan av en cirkel med radie 1 och medelpunkt i origo. Vi kan använda vinkeln θ med x-axeln som ett sätt att parametrisera kurvan.

Om θ är vinkeln linjen från origo till en punkt (x, y) bilder med x-axeln vet vi att $x = \cos\theta$ och $y = \sin\theta$ så vi får välja $\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ där

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{A.1}$$

för alla $\theta \in [0, \pi]$ är en parametrisering av halvcirkeln.

Det enklaste sättet att hitta en annan parametrisering är att ta den första och ”rita kurvan dubbel så fort” istället: Vi tar istället $\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbf{R}^2$ där

$$\gamma(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$$

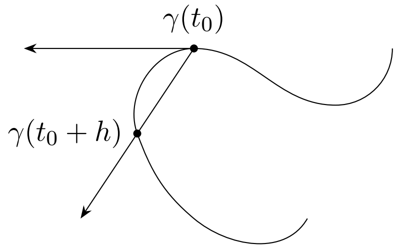
för alla $\theta \in [0, \pi/2]$. □

Om en parametrisering $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ av en kurva uppfyller $\gamma(a) = \gamma(b)$ kallar vi kurvan för *sluten*

En parametrisering av en kurva innehåller mycket information. Som ett exempel försöker vi hitta ett sätt att ta fram en tangentlinje till en kurva vid en viss punkt. Låt $\gamma\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ vara en parametrisering av en kurva. Vi leter efter en tangentlinje till kurven i punkten $\gamma(t_0)$ (för givet $t_0 \in [a, b]$).

För att specificera en tangentlinje behöver vi också riktningen av tangentlinjen. Det kan vi åtminstone uppskatta med kvoten

$$\frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \tag{A.2}$$



Figur A.2: En uppskattning av en tangentvektor till en kurva och tangentvektorn.

(se figur A.2). Vi känner förstås till kvoten: den uppstår i definitionen av derivatan av en funktion. Skillnaden här förstås är att täljaren är differensen av två vektorer istället för reella tal, men annars är den detsamma vi såg i envariabelanalys. Ju mindre h desto närmare är vektorn i (A.2) till riktningen av tangentlinjen genom $\gamma(t_0)$. Så vi definierar *derivatan* av γ i t_0 att vara

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}. \tag{A.3}$$

Eftersom den även pekas i samma riktning som kurvans tangentlinje kallar vi den för en *tangentvektor* till kurvan i punkten $\gamma(t_0)$.

Om γ har komponentfunktioner γ_i ($i = 1, 2$ och möjligen 3), så $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ i fallet $n = 3$, ser vi direkt från (A.3) att

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$$

där $\gamma_i'(t)$ är den vanlig derivatan från envariabelanalys. Nu ser vi direkt att det inte alls är skälvklart att gränsvärdet (A.3) existerar för vilket γ som helt: Den existerar precis när varje komponentfunktion är deriverbara och därför kallar vi γ för *deriverbar* när varje komponentfunktion är deriverbar.

Exampel A.5. *Hitta en ekvation för tangentlinjen till kurvan i exempel A.4 genom punkten* $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Lösning. Vi tar parametriseringen (A.1). Observera att $(1/2, \sqrt{3}/2) = \gamma(\pi/3)$, så tangentlinjen går igenom $\gamma(\pi/3)$ i riktningen $\gamma'(\pi/3)$. Vi räknar

$$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

så $\gamma'(\pi/3) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$. Härifrån är den enkelt att skriva tangentlinjen i parameterform:

$$(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2) + t(-\sqrt{3}/2, 1/2)$$

för $t \in \mathbf{R}$. Den har även den kartesiska ekvationen

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

□

Film A.3: `https://youtu.be/rGIMNI-j8yc`

Ytor

Vi kan för ytor utföra en motsvarande konstruktion till den vi gjorde för kurvor. Istället för att betrakta kontinuerliga avbildningar av intervall betrakta vi kontinuerliga avbildningar av öppna delmängder av planet. Vi börjar med ett exempel.

Exampel A.6. *Betrakta skivan* $D = \{(x, y) \colon x^2+y^2 \leq 1\}$ *och halvsfären* $S_+ = \{(x, y, z) \colon x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$. *Vi kan skriva halvsfären som värdemängd av en funktion. Vi föreställer oss att skivan sitta på xy-planet i* $\mathbf{R}^3$ *och höja upp varje punkt på skivan tills det når halvsfären. Höjden av halvsfären över punkten* $(x, y, 0)$ *är* $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *och därför är* $\mathbf{u} \colon D \to \mathbf{R}^3$ *definierad enligt formeln*

$$\mathbf{u}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

för $(x, y) \in D$ *en parametrisering av* S_+.

I allmänhet är en *parametrisering* (eller *parameterframställning*) av en ytor i $\mathbf{R}^3$ en kontinuerlig funktion $\mathbf{u} \colon D \to \mathbf{R}^3$ där D är en delmängd av $\mathbf{R}^2$ sådant att ytan är $\mathbf{u}$:s värdemängd. Precis som för kurvor när vi pratar om deriverbarheten av $\mathbf{u}$ menar vi deriverbarheten av $\mathbf{u}$:s komponentfunktioner, det vill säga existensen av partiella derivator.[2]

Betrakta en parametrisering $\mathbf{u} \colon D \to \mathbf{R}^3$ av en yta $S \subset \mathbf{R}^3$. Observerar att om vi håller en av $\mathbf{u}$:s variabler konstant anskaffar vi en parametrisering av en kurva som ligger i ytan S. Till exempel om (u, v) är en inre punkt av $D \subseteq \mathbf{R}^2$ finns det ett interval I som innehåller u sådan att funktionen

$$s \mapsto \gamma_1(s) := \mathbf{u}(s, v) \quad (s \in I)$$

är en parametrisering av en kurver som ligger i ytan S. Man kan säga samma sak för funktionen

$$t \mapsto \gamma_2(t) := \mathbf{u}(u, t) \quad (t \in J)$$

där J är ett lämpligt intervall som innehåller v. Derivator av de två kurvor är tangentvektor till två olika kurvor som ligger i S och är därför två olika tangentvektor till ytan S. Därför är

$$\mathbf{n} = \gamma_1'(u) \times \gamma_2'(v)$$

en normalvektor till ytan S i punkten $\mathbf{u}(u, v)$. Men

$$\gamma_1'(u) = \mathbf{u}_u'(u, v) \quad \text{och} \quad \gamma_2'(v) = \mathbf{u}_v'(u, v)$$

så

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_u'(u, v) \times \mathbf{u}_v'(u, v).$$

Med hjälp av en deriverbar parametrisering av en yta kan vi räkna ut en normal till ytan i varje punkt på ytan.

Film A.4: `https://youtu.be/k0JO7yIfyMg`

A.4 Derivering av skalär- och vektorfält

I flervariabelanalys har ni sett *gradienten* av en skalärfält $F \colon A \to \mathbf{R}$ där $A \subseteq \mathbf{R}^n$. Den definieras som

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = (\partial_x F(x, y, z), \partial_y F(x, y, z), \partial_z F(x, y, z))$$

eller

$$\operatorname{grad} F(x, y) = (\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y))$$

beroende på om $n = 3$ eller 2 och är ett vektorfält $F \colon A \to \mathbf{R}^n$. Vi använder oss av notationen

$$\nabla F = \operatorname{grad} F.$$

Vi definierar också andra differentialoperatorer genom att formellt blanda operatorn

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

[2]Men kom ihåg skillnaden mellan deriverbar och differentierbar från flervariabelanalys

med produkter från linjär algebra: Vi har *divergensen* som ges av uttrycket

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

där $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett vektorfält och *rotationen*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,.$$

Rent formellt då är divergensen och rotationen av en funktion **F** skalär- respektive vektorprodukten mellan ∇ och **F**, men ”produkten” mellan en partiell derivata och en komponent funktion tolkas som vanligt derivering.

Film A.5: `https://youtu.be/znuIcrW_Bhs`

Kom ihåg det vi lärde oss i flervariabelanalys om hur vi kan hitta normalvektor till en yta när ytan ges som en nivåmängd.

Film A.6: `https://youtu.be/h0t1zi4zfHo`

Lektion A.1

Efter du har gått igenom föreläsning A förbered dig för lektionen genom att göra följande uppgifter. Eventuella frågor kan du ställa under lektionens gång. Samarbeta gärna med dina klasskompisar. Om det finns någonting många ha svårt för kan det vara värt att mejla lektionsledaren i förväg så de kan förbereda ytterligare exempel på den.

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 1.3
- 1.5
- 1.7
- 1.10
- 1.11
- 1.12
- 2.3
- 2.4
- 2.5
- 2.9

Från Ramgard:

- 20