Modul B

Ytintegraler, flöde och Gauss sats

Föreläsning B

Ramgard kapitel 5–6.

B.1 Elektrostatik

Vår genomgång av vektoranalys tar mycket motivation och inspiration från elektrostatik. Här går vi igenom lite av de fysiska idéerna – det här avsnittet examineras inte direkt, så ni kan hoppa över det om ni vill, men jag tror man kan dra nyttja av att ha en känsla för det. Jag hoppas att det mesta av det vi diskuterar här är bekant eller i värsta fall inte så långt ifrån det ni här läst i fysikklasser i skolan.

Elektrisk laddning

Elektrisk laddning är en fysikalisk storhet. För våra syften kan vi tänka att det är en fysisk egenskap som varje kropp har. Den kan vara positivt, negativt eller noll. Det motsvara massa, som är en annan fysikalisk storhet (men till skillnad från laddning kan massa inte vara negativ).

Vi kommer betrakta både punkladdningar och laddningstäthet. En punktladdning är en kropp som anses existerar i en punkt $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ med laddningen q. För en kropp som fyller ett område $M \subseteq \mathbf{R}^3$ betecknar vi laddningstätheten som $\rho(\mathbf{r})$ för $\mathbf{r} \in M$ och sen är laddningen av hela kroppen

$$Q = \iiint_M \rho(\mathbf{r}) dV(\mathbf{r})$$

där dV är volymelementet ni har sätt i flervariabelanalys (som skrivs till exempel i kartesiska koordinater som $dxdydz$).

Coulombs lag

Coulombs lag specificerar kraften som verkar mellan två elektrisk laddad partiklar, det vill säga mellan två punkladdningar. Vi låter $q_0 \in \mathbf{R}$ och $q \in \mathbf{R}$ beteckna laddningarna av två partiklar som sitter i punkten $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ respektive $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$. Då säger *Coulombs lag* att kraften $\mathbf{F}$ som verkar på partikeln i $\mathbf{r}_0$ på grund av laddningen q i $\mathbf{r}$ är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = K \frac{q q_0 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \tag{B.1}$$

där K är en proportionell konstant. Vi vet faktiskt att

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

där ϵ_0 är den elektriska konstanten.

Utifrån (B.1) ser vi att kraften $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)$:

(a) är proportionell mot produkten qq_0 av elektriska laddningar av både partiklar;

(b) är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|$; och

(c) verkar längs linjen som innehåller $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r}_0$.

Superposition

Krafter från olikar laddningar lyder *superpositionsprincipen* – det vill säga krafterna från olika laddningar kan adderas. Om vi har till exempel partiklar i punkterna $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ men laddningar q_0, q_1 respektive q_2 säger Coulombs lag att kraften på partikeln i $\mathbf{r}_0$ på grund av laddningen q_1 är

$$\mathbf{F}_1 = K\frac{q_1 q_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3}$$

och kraften på partikeln i $\mathbf{r}_0$ på grund av laddningen q_2 är

$$\mathbf{F}_2 = K\frac{q_2 q_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2|^3}$$

Superpositionsprincipen säger att den totala kraften på partikeln i $\mathbf{r}_0$ på grund både q_1 och q_2 är summan

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = Kq_0\left(\frac{q_1(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{q_2(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2|^3}\right).$$

I synnerhet säger superpositionsprincipen att kraften mellan två elektriskt laddade partiklar ändras inte av andra laddningar.

Om vi har en mängd laddningar $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$ i de respektive punkterna $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\dots \mathbf{r}_k$ säger superpositionsprincipen och Coulombs lag att kraften på q_0 i $\mathbf{r}_0$ är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = Kq_0\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3}. \tag{B.2}$$

För att summan ska vara definierad måste $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_i$ för $i = 1, \dots, k$.

Med lite handviftning säger samma argument att kraften på en partikel i $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ med laddning q_0 som uppstår på grund av laddningstätheten $\rho\colon M \to \mathbf{R}$ är

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = Kq_0\iiint_M \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3}dV(\mathbf{r}). \tag{B.3}$$

Elektriskt fält

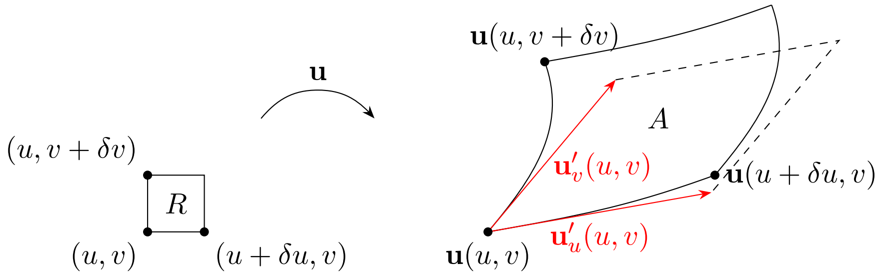
Enligt Coulombs lag och superpositionsprincipen är kraften på en laddning q_0 i en punkt $\mathbf{r}_0$ alltid proportionell mot laddningen q_0. Därför kan vi betrakta storleken $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)/q_0$ som vi kallar för *elektriska fältet* i punkten $\mathbf{r}_0$. Man kan undra om det överhuvudtaget har någon fysisk mening: Det är en djup filosofisk fråga, men just nu kan vi tänka att det kraften på en orörlig positivt laddad test partikel i varje punkt i rummet.

Från (B.2) ser vi att elektriska fältet som uppstår i punkten $\mathbf{r}_0$ på grund av en mängd punktladdningar $\{q_1, \dots, q_k\}$ i de respektive punkterna $\mathbf{r}_1$, $\dots \mathbf{r}_k$ är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = K\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3}. \tag{B.4}$$

(Återigen måste $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}_i$ för $i = 1, \dots, k$.) Dessutom ser vi från (B.3) att elektriska fältet i $\mathbf{r}_0 \in \mathbf{R}^3$ som uppstår på grund av laddningstätheten $\rho\colon D \to \mathbf{R}^3$ är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = K\iiint_D \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3}dV(\mathbf{r}). \tag{B.5}$$



Figur B.1: Avbildning av en rektangel under $\mathbf{u}$.

Vid första ogonblick känns det som (B.5) borde vara väldigt användbart. Det ger en explicit formel för elektriska fältet som uppstår på grund av en laddningstäthet ρ. Med tyvärr är det inte så direkt användbart. Integralen är i många fall så svårt att beräkna att man inte kan använda formeln alls och behöver hitta en annat sätt att nå elektriska fältet. Ett mål av nästa modulen är att hitta en differentialekvation för elektriska fältet. Erfarenhet visar att differentialekvationen är mycket mer användbar en (B.5). På vägen ditt kommer vi upptäcka Gauss sats som är en väldigt kraftful sats i vektoranalys.

Film B.1: `https://youtu.be/vNCtnnNITKg`

B.2 Ytintegraler

Nu ta vi vad kan känna som en avstickare och vänder oss tillbaka till ytor och hur man kan definierar integraler över ytor – ytintegraler. Man kan undra vad det har att göra med (B.5) när man ser att det innehåller bara en integral över en volym (som redan är välkänt från flervariabel analys).

Svaret på det är att vi vill hitta ett samband mellan volymintegraler och ytintegraler. Sambandet kallas för Gauss sats men innan vi kan upptäcka den behöver vi först hitta en rimligt definition för en ytintegral.

Motivationen bakom definitionen

Låt $\mathbf{u}\colon D \to \mathbf{R}^3$ vara en parametrisering av en yta $S \subset \mathbf{R}^3$ så värdemängden av $\mathbf{u}$ är S och $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Vi ställer frågan: Hur avbildar $\mathbf{u}$ en liten rektangel $R = \{(x, y)\colon u \leq x \leq u + \delta u, v \leq x \leq v + \delta v\} \subseteq D$ där δu och δv är två små positiva tal? Vi kallar avbildningen av R för A. Se figur B.1. Funktionerna

$$s \mapsto \mathbf{u}(x, v) \quad \text{och} \quad t \mapsto \mathbf{u}(u, t)$$

parametriserar två kurvor som är sidorna till A som går igenom punkten $\mathbf{u}(u, v) \in S$. Om $\mathbf{u}$ är tillräckligt glatt är arean av avbildningen A välapproximerad av parallellogramen med sidorna $\mathbf{u}'_u(u, v)\delta u$ och $\mathbf{u}'_v(u, v)\delta v$. Ju mindre δu och δv desto bättre är uppskattningen.

Area av parallellogramen ges av

$$\left|\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)\right| (\delta u)(\delta v) = \left|\mathbf{u}'_u(u, v)\right| \left|\mathbf{u}'_v(u, v)\right| \sin\theta(\delta u)(\delta v)$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}'_u(u, v)$ och $\mathbf{u}'_v(u, v)$. Om det var möjligt att dela upp D i små rektanglar R_i med ett hörn i punkten (u_i, v_i) och sidolängderna δu och δv skulle en bra definition av en integral av en funktion $F\colon S \to \mathbf{R}$ över S vara något slags gränsvärde av

$$\sum_i F(\mathbf{u}(u_i, v_i))|\mathbf{u}'_u(u_i, v_i) \times \mathbf{u}'_v(u_i, v_i)|dudv$$

då δu och δv går mot noll. Det kunde vi rimligen gissar ha gränsvärdet

$$\iint_D F(\mathbf{u}(u, v))|\mathbf{u}'_u(u, v) \times \mathbf{u}'_v(u, v)|dudv \tag{B.6}$$

som är en väldefinierad integral över ett område D som vi känner igen från flervariabelanalys. Integralen i (B.6) är den vi tar som definitionen av integralen av en funktion F över en parametriserad yta S.

Film B.2: https://youtu.be/xPXRrkjnIoM

Definitionen och ett exempel

Nu definierar vi integralen av en funktion över en yta.

Definition B.1. *Låt $S \subseteq \mathbf{R}^3$ vara en* styckvis glatt yta *– det vill säga att den har en parametrisering $\mathbf{u}\colon D \to S$ som är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar – och $F\colon S \to \mathbf{R}$ vara en begränsad styckvis kontinuerlig funktion. Vi definierar*

$$\iint_S F d\sigma = \iint_S F(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) := \iint_D F(\mathbf{u}(u,v))|\mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v)|dudv.$$

Vi definierar arean *av S att vara*

$$\iint_S d\sigma := \iint_D |\mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v)|dudv$$

Exampel B.2. *Betrakta ytan S som har parametriseringen $\mathbf{u}\colon [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$ som ges av*

$$\mathbf{u}(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

för $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 2\pi$. Beräkna

$$\iint_S F(x,y,z) d\sigma(x,y,z)$$

där $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1}$.

Lösning.

Film B.3: https://youtu.be/vrs92xyHue0

□

Flöde och orientbarhet

Nu diskuterar vi ett särskilt fall av integraler över ytor. Betrakta ett vektorfält $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ och en styckvis glatt yta $S \subset \mathbf{R}^3$. Om $\mathbf{F}$ representerade hastigheten av en vätska kunde man fråga: Vad är mängden av vätska som passerar igenom ytan per tidsenhet? Om vektorfältet var alltid parallellt med ytan skulle ingen vätska passera igenom ytan. Däremot om vektorfältet var normal med ytan skulle mängen vara $\iint_S |\mathbf{F}| d\sigma$ per tidsenhet. Hastigheten av vätskan genom ytan i en viss punkt $\mathbf{x}$ ges är den komponent av $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ som pekar i ytans normalariktning. Därför är det

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

vi behöver integrera över ytan S, där $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ är en enhetsnormal till ytan i $\mathbf{x}$. Men i varje punkt på S finns det två möjliga val av enhetsnormal – den ena är alltid den negativa av den andra. Så när vi integrerar $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ är det viktigt att välja $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ på ett kontinuerligt sätt över ytan. (Varför?)

Definition B.3. *Vi kallar en yta för* orienterbar *om det finns ett kontinuerligt sätt att välja en* plus- *och en* minussidan *på hela ytan.*

På en styckvis glatt yta S kan vi nästan överallt välja en enhetsnormal med hjälp av parametriseringen $\mathbf{u}$: Vi väljer

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{n}(u,v)}{|\mathbf{n}(u,v)|} = \frac{\mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v)}{|\mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v)|} \tag{B.7}$$

där $\mathbf{x} = \mathbf{u}(u,v)$. Om en styckvis glatt yta S är orienterbar finns det en parametrisering $\mathbf{u}$ som en konsekvent med orientering, det vill säga att (B.7) alltid pekar åt plussidan av S.

Definition B.4. *Vi definierar* flödet *av en begränsat kontinuerligt vektorfält* $\mathbf{F}$ *genom en orienterbar styckvis glatt yta* S *att vara*

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$$

där $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ *är ett val av enhetsnormal till ytan konsekvent med orienteringen av* S.

Vi kommer snart se att flödet är ett viktigt begrepp även där vektorfältet är ett elektriskt fält. Eftersom det alltid finns två val av kontinuerlig enhetsnormal på en orienterbar yta, och den ena är den negativa av den andra, måste vi precisera vilken val av $\hat{\mathbf{n}}$ vi har gjort för att precisera flödets tecken.

Utifrån definition B.4 och uttycket för normalvektorn (B.7) kan vi räkna att

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u,v)) \cdot \frac{\mathbf{n}(u,v)}{|\mathbf{n}(u,v)|} |\mathbf{n}(u,v)| dudv \\
&= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) dudv \qquad \text{(B.8)} \\
&= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{u}(u,v)) \cdot (\mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v)) dudv
\end{aligned}$$

där S är har parametriseringen $\mathbf{u}\colon D \to \mathbf{R}^3$. Likhet (B.8) förenklar räkningar av flöden eftersom man slipper räkna enhetsnormalen separat.

Exampel B.5. *Betrakta flödet av vektorfältet* $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x, z, y)$ *genom följande del av en cylinder:*

$$S = \{(x,y,z)\colon y^2 + z^2 = 4, -1/2 \le x \le 1/2, y \ge 0, z \ge 0\}.$$

Välj normalvektorn så att den pekar utåt från x-axeln.

Lösning. Först behöver vi hitta en lämplig parametrisering av S. Vi kan välja

$$\mathbf{u}(u,v) = (u, 2\cos v, 2\sin v)$$

där $-1/2 \le x \le 1/2$ och $0 \le v \le \pi/2$. Sedan räknar vi att

$$\mathbf{u}'_u(u,v) = (1,0,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{u}'_v(u,v) = (0, -2\sin v, 2\cos v)$$

så $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{u}'_u(u,v) \times \mathbf{u}'_v(u,v) = (1,0,0) \times (0,-2\sin v, 2\cos v) = (0, -2\cos v, -2\sin v)$. Detta normal pekar mot x-axeln så vi byter tecken på den och sätter istället

$$\mathbf{n}(u,v) = (0, 2\cos v, 2\sin v)$$

Det följer från (B.8) att flödet är

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) &= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} F(u, 2\cos v, 2\sin v) \cdot (0, 2\cos v, 2\sin v) dudv \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} (\sin u, 2\sin v, 2\cos v) \cdot (0, 2\cos v, 2\sin v) dudv \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} 8 \sin v \cos v dudv \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_{-1/2}^{1/2} 4\sin(2v) dudv = \int_0^{\pi/2} 4\sin(2v) dv \\
&= -2\cos(2v) \Big|_0^{\pi/2} = 4
\end{aligned}$$

□

B.3 Gauss sats och divergens

Nu utreda vi ett samband mellan en integral över en kropp i $\mathbf{R}^3$ – en volymintegral – och flödet genom sin yta – en ytintegral. Sambandet kallas för *Gauss sats* eller *Divergens sats*. Det är inte svårt att föreställa sig att sådana sats kan vara till stor nytta: Som en tillämpning kommer vi till härleda från Coulombs lag och superpositionsprincipen en differential ekvation för elektriska fält.

Vad motivera vår utredning är en lust att förstå gränsvärdet av kvoten

$$\frac{\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma}{\iiint_M dV} \tag{B.9}$$

då M krymper sig till en punkt. Här är $M \subseteq \mathbf{R}^3$ en kropp och $S = \partial M$ med en utåtriktad enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}$ (och $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är en vektorfält).

Gränsvärdet av (B.9) är intressant eftersom det säger någonting om vektorfältets ”källor”: Om vi tänker att $\mathbf{F}$ var hastigheten av en vätska då skulle flödet mäter hur mycket vätska rinner ut av M. I (B.9) har vi förstås normaliserat flödet med volymnen av M, så gränsvärdet av (B.9) då M krymper sig ner till en punkt säger någonting om hur mycket vätska flödar ut av (eller flödar in i) punkten som M krymper sig ner till.

Och det fantastiska är att vi även kommer få ett enkelt uttryck för gränsvärdet! Uttrycket är

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\mathbf{x}) \tag{B.10}$$

Sats B.6 (Gauss sats)**.** *Låt M vara en begränsad öppen mängd i $\mathbf{R}^3$ vars rand ∂M är en styckvis glatt sluten orienterad yta S där i varje punkt på S väljer vi enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ som pekar utåt från M. Då är*

$$\iiint_M \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma \tag{B.11}$$

för varje begränsat och kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F}$ vars definitionsmängd innehåller M.

Bevis. **(Extra material)**[1]. Vi bevisar Gauss sats bara i fallet M har en särskilt enkelt form. Vi antar att M kan skrivas som en mängd mellan två grafer i x-, y- och z-riktningen: Det vill säga att vi kan skriva M på tre sätt:

$$\begin{aligned}
M &= \{(x,y,z)\colon (x,y)\in D, \varphi(x,y)\le z\le \psi(x,y)\},\\
M &= \{(x,y,z)\colon (y,z)\in D, \varphi_1(y,z)\le x\le \psi_1(y,z)\} \quad \text{och}\\
M &= \{(x,y,z)\colon (z,x)\in D, \varphi_2(z,x)\le y\le \psi_2(z,x)\}
\end{aligned}$$

för lämpliga funktioner φ, φ_1, φ_2, ψ, ψ_1 och ψ_2. Vi använder första omskrivning av M för att bevisa likheten

$$\iiint_M \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)dxdydz = \iint_S (0,0,F_3)\cdot\hat{\mathbf{n}}d\sigma \tag{B.12}$$

med samma notation som ovan (så $\hat{\mathbf{n}}$ är utåtriktad) och F_3 är den tredje komponent av ett vektorfält $\mathbf{F}$. Mer precis sagt är $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Beviset av (B.12) bygger på en uppgift som vi lämnar den som en övning till läsaren.

Uppgift B.7. *Betrakta en yta S som är grafen av en funktion $f\colon D\to\mathbf{R}$ där $D\subset\mathbf{R}^2$. Visa att*

$$\iint_S G d\sigma = \iint_D G(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'(x,y)^2+f_y'(x,y)^2}dxdy$$

för begränsade kontinuerliga funktioner $G\colon S\to\mathbf{R}$.

[1] Om man så vill kan man återkomma till den lilafärgade texten efter man är bekant med modulens andra innehåll.

Visa även följande formeln för flödet av en vektorfält $F\colon S \to \mathbf{R}^3$ med komponent funktionerna $F = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\begin{aligned}&\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \\ &= \iint_D \big(-F_1(x,y,f(x,y)) f_x'(x,y) - F_2(x,y,f(x,y)) f_y'(x,y) + F_3(x,y,f(x,y))\big)\, dxdy\end{aligned} \tag{B.13}$$

Titta på följande videoklipp där vi avslutar beviset av (B.12).

Film B.4: `https://youtu.be/tD8j9le0kc4`

En liknande argument med andra och tredje omskrivningen av M ge likheterna

$$\begin{aligned}\iiint_M \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) dxdydz &= \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \\ \iiint_M \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) dxdydz &= \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma\end{aligned} \tag{B.14}$$

Vi behöver knappt skriva ner beviset av (B.14): vi har helt enkelt bytt roll av variablerna x, y och z med varandra. Om vi summerar alla likheter i (B.12) och (B.14) får vi (B.11) där $\operatorname{div} \mathbf{F}$ definieras i B.10. □

Nu ger vi ett exempel av hur man kan använda Gauss sats för att räkna ut integraler.

Exampel B.8. *Beräkna*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

där $S = \{(x,y,z)\colon z = (1-x^2-y^2)e^{1-x^2-y^2}, x^2+y^2 \le 1\}$, enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ pekar uppåt och $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^y \cos z, \sqrt{x^3+1} \sin z, x^2+y^2+3)$.

Lösning.

Film B.5: `https://youtu.be/imIWLoNsDWE`

□

Divergens och gradient igen

Nu vänder vi tillbaka till gränsvärdet av (B.9). Vi betrakta en variant av (B.9) där kroppen $M = B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3\colon |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\}$ är ett klot av radie $r > 0$ och medelpunkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^3$. Antagandena på mängden M i vår bevis av (B.11) är uppfyllde när $M = B_r(\mathbf{x}_0)$, så för en C^1 vektorfält $\mathbf{F}$ kan vi skriva om (B.9) till

$$\frac{\iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iiint_{B_r(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \to \operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0) \quad \text{då } r \to 0.$$

Jag hoppas att sista gränsvärdet är relativt självklart: Det är inget mer än påståendet att medelvärdet av den kontinuerliga funktionen $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ över ett klot $B_r(\mathbf{x}_0)$ går mot $\operatorname{div}(\mathbf{F})(\mathbf{x}_0)$ då $r \to 0$.[2] Därför på något sätt fångar (B.10) $\mathbf{F}$:s källor, eller mäter $\mathbf{F}$ tendens att ”stråla”.

I flervariabelanalys har ni sätt notationen

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

[2] Jämför med integralkalkylens medelvärdessats

för vektorn av alla partiella derivator av en (C^1) funktion $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Vi tar notionation lite vidare och definierar en differential operator som kallas för *nablaoperatorn* och är

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Notationen tillåter oss att skriva divergens av ett vektorfält

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

där ”produkten” av till exempel $\partial/\partial x$ och F_1 i skärlärprodujten tolkas som derivatan av F_1 med avseende på x. Notation är även konsekvent med hur vi skrev gradienten ∇F i flervariabelanalys. Vi kommer också använda notationen senare i kursen.

Film B.6: `https://youtu.be/BfL7OvLPQF8`

Följande sats kan visas med hjälp av vanliga räkneregler från flervariabelanalys.

Sats B.9. *Låt vektorfält $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ och $\mathbf{G}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, och funktioner $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ och $G\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ vara deriverbara. Då för $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ är:*

(a) $\nabla(\alpha F + \beta G) = \alpha \nabla F + \beta \nabla G$*;*

(b) $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{F}$*;*

(c) $\nabla(FG) = (\nabla F)G + F(\nabla G)$*;*

(d) $\nabla \cdot (G\mathbf{F}) = (\nabla G) \cdot \mathbf{F} + G(\nabla \cdot \mathbf{F})$*; och*

(e) $\nabla \cdot (\nabla F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ *om F är två gånger deriverbar.*

B.4 Två tillämpningar av Gauss sats

Gauss lag i integral- och differentialform

Gauss sats visar att Coulombs lag och superpositionsprincipen är ekvivalent med Gauss lag, en av Maxwells ekvationer – fyra ekvationer som är en förenade beskrivning av elektriska och magnetiska fält. Gauss lag har två ekvivalenta former, en integral- och differentialform.

Film B.7:`https://youtu.be/rzCZWnjr6qE`

Uppgifter (B-11) och (C-5) nämnde i videoklippet är det här året uppgift B.10 nedan respektive 1.14(d) från Nikoltjeva-Hedberg med $\Phi(r) = r^{-3}$.

Gauss lag i integralform är likheten mellan den totala laddningen Q i en begänsad kropp M och flödet av elektriska fältet genom kroppens yta $S = \partial M$. Den säger att

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

där enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ är utåtriktad från M.

Gauss lag i differentialform är en partiell differentialekvation i elektriska fältet $\mathbf{E}$ och laddningstätheten ρ. Den säger att

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Fördelen av Gauss lag i differentialform över den i integralform är att det är en lokaliserad ekvation, det vill säga att ekvationen handlar om vad händer i (en omgivning av) en punkt. Däremot är Gauss lag i integralform en en relation som måste håller för varje tänkbara yta S! Det är därför svårt att använda det för att beräkna själva fältet $\mathbf{E}$.

Men Gauss lag i differentialform är endå inte perfekt: Det är en ekvation för $\mathbf{E}$, men $\mathbf{E}$ är en vektorfält med tre komponenter. Så det känns som vi behöver mer information för att kommer åt den elektriska fältet om vi inte har mycket symmetri vi kan använda oss av. Det kommer vi närmare till i nästa module.

`https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law#Relation_to_Gauss's_law`

Uppgift B.10. *Låt S_ρ vara en sfär av radie $\rho > 0$ med medelpunkt i origo och $\mathbf{E}$ vara elektriska fältet från en punktladdning i origo (det vill säga låt $\mathbf{E}$ vara* (B.4) *där $k = 1$, q_1 är ett givet tal och $\mathbf{r}_1$ är origo). Beräkna $\iint_{S_\rho} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$ där $\hat{\mathbf{n}}$ peckar bort från origo.*

Kontinuitetsekvationen

Kontinuitetsekvationen är ett sätt att uttrycka påståendet att en fysisk storhet är konserverad. Betrakta en konserverad storhet med täthet $\rho(x, y, z, t)$ och hastighet $\mathbf{v}(x, y, z, t)$.[3] Kontinuitetsekvationen är den partiell differentialekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.^4 \tag{B.15}$$

För att se varför det gäller kan man först övertyga sig själv att om storhet är konserverad måste

$$-\iint_{\partial M} (\rho \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \frac{d}{dt} \iiint_M \rho(x, y, z, t) dxdydz \underset{\text{Vi byter plats av } \iiint \text{ och } \partial/\partial t}{=} \iiint_M \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} dxdydz$$

gäller eftersom det enda sätt att mändgen av storheten i en kropp M kan ändra är genom att lämna kroppen genom sin yta ∂M. Gauss sats säger därför att

$$\iiint_M \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} dxdydz = -\iiint_M \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

och eftersom M kan (till exempel) vara vilken öppen mängd som helst kan vi dra slutsatsen att själva integrander måste vara lika. Det vill säga vi får (B.15).

B.5 En kort sammanfattning och en blick framåt

Grant Sanderson har ett vackert videoklipp (på engelska) som ger en bra känsla för vektorfält, divergens och rotation. Vi har förstås redan tänkt mycket på vektorfält och även divergens. Rotation (engelska: *curl*) kommer vi snart se i mer detalj, men det kan vara bra att få en smak av begreppet nu eftersom den är ett syskon till divergens.

Film B.8: `https://youtu.be/rB83DpBJQsE`

[3] Påståendet att en storhet är konserverad kallas för en *konservationslag*.

[4] Här tar vi divergensen i variablerna (x, y, z).

Lektion B.1

Efter du har gått igenom föreläsning B förbered dig för lektionen genom att göra följande uppgifter. Som vanligt kan ni ställa eventuella frågor under lektionen. Samarbeta gärna!

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 3.3
- 3.4
- 3.14
- 4.1
- 4.2
- 4.3
- 4.4
- 4.8
- 4.9

Lektion B.2

Gör följande uppgifter. Som vanligt kan ni ställa eventuella frågor under lektionen. Samarbeta gärna!

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 1.13
- 1.14
- 4.10
- 4.11
- 4.13
- 4.14
- 4.15
- 4.17
- 4.18

Modul C

Gauss sats och singulära vektorfält

Föreläsning C

Ramgard kapitel 6.

C.1 Singulära vektorfält

Om man är lite kreativ med hur man väljer områden och ytor kan man på något sätt tillämpa Gauss sats på mer allmänna vektorfält än de som är tillåten enligt hypoteserna i sats B.6. Kom ihåg att vi tillämpade Gauss sats i videoklipp B.7 till ett områd $M \setminus B_\rho(\mathbf{r}_1)$. Vi tog bort bollen $B_\rho(\mathbf{r}_1)$ från området för att undvika singulariteten i vektorfältet $\mathbf{E}$ i origo. I nästa videoklipp utvecklar vi idén vidare och använder oss av generaliserade integraler.

Film C.1: `https://youtu.be/jFbosz2fUzU`

Exampel C.1. *Beräkna flödet av vektorfältet*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,\mathbf{k}$$

genom ytan $S = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ *där vi väljer normalen så att den pekar bort från* z*-axeln.*

Lösning. Vi observerar att $\mathbf{F}$ har ett singularitet längs z-axeln och ytan S skär z-axeln i origo. Därför måste vi betrakta flödet som en generaliserad integral.

Film C.2: `https://youtu.be/_k4bBHJJhX4`

Här har jag skrivit upp samma lösningen fast där jag använder cylinderkoordinater lite mer. Ytan S kan skrivas som lösningar till $\rho^2 + (z-1)^2 = 1$ i cylinderkoordinater. Detta ger att $\rho = \sqrt{2z - z^2}$ och vi kan därför parametrisera ytan S (i cylinderkoordinater) med

$$\mathbf{u}(\varphi, z) = \sqrt{2z - z^2}\mathbf{e}_\rho + z\,\mathbf{e}_z$$

med $(\varphi, z) \in D$ där $D = \{(\varphi, z)\colon 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le 2\}$. I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{e}_z.$$

Vi kan räkna $\mathbf{u}'_\varphi = \sqrt{2z - z^2}\mathbf{e}_\varphi$ och $\mathbf{u}'_z = \frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}}\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$, så

$$\mathbf{u}'_\varphi \times \mathbf{u}'_z = \sqrt{2z - z^2}\mathbf{e}_\rho + (z-1)\,\mathbf{e}_z.$$