

# Modul C

## Gauss sats och singulära vektorfält

### Föreläsning C

Ramgard kapitel 6.

#### C.1 Singulära vektorfält

Om man är lite kreativ med hur man väljer områden och ytor kan man på något sätt tillämpa Gauss sats på mer allmänna vektorfält än de som är tillåten enligt hypoteserna i sats B.6. Kom ihåg att vi tillämpade Gauss sats i videoklipp B.7 till ett område  $M \setminus B_\rho(\mathbf{r}_1)$ . Vi tog bort bollen  $B_\rho(\mathbf{r}_1)$  från området för att undvika singulariteten i vektorfältet  $\mathbf{E}$  i origo. I nästa videoklipp utvecklar vi idén vidare och använder oss av generaliserade integraler.



**Film C.1:** <https://youtu.be/jFbosz2fUzU>

**Exempel C.1.** Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{k}$$

genom ytan  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$  där vi väljer normalen så att den pekar bort från  $z$ -axeln.

*Lösning.* Vi observerar att  $\mathbf{F}$  har ett singularitet längs  $z$ -axeln och ytan  $S$  skär  $z$ -axeln i origo. Därför måste vi betrakta flödet som en generaliserad integral.



**Film C.2:** [https://youtu.be/\\_k4bBHJjX4](https://youtu.be/_k4bBHJjX4)

Här har jag skrivit upp samma lösningen fast där jag använder cylinderkoordinater lite mer. Ytan  $S$  kan skrivas som lösningar till  $\rho^2 + (z - 1)^2 = 1$  i cylinderkoordinater. Detta ger att  $\rho = \sqrt{2z - z^2}$  och vi kan därför parametrisera ytan  $S$  (i cylinderkoordinater) med

$$\mathbf{u}(\varphi, z) = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$$

med  $(\varphi, z) \in D$  där  $D = \{(\varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$ . I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_z.$$

Vi kan räkna  $\mathbf{u}'_\varphi = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\varphi$  och  $\mathbf{u}'_z = \frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}} \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$ , så

$$\mathbf{u}'_\varphi \times \mathbf{u}'_z = \sqrt{2z - z^2} \mathbf{e}_\rho + (z - 1) \mathbf{e}_z.$$

För att undvika singularitet längs  $z$ -axeln definierar vi ytan

$$S_\epsilon = \{\sqrt{2z - z^2}\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z : \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \quad (\epsilon > 0)$$

så det sökta flödet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma.$$

Låt  $D_\epsilon = \{(\varphi, z) : \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  vara parameterområdet. Vi har då

$$\begin{aligned} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\epsilon \, dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}(\varphi, z)) \cdot (\mathbf{u}'_\varphi \times \mathbf{u}'_z) \, d\varphi dz \\ &= \iint_{D_\epsilon} \left[ \sqrt{2z - z^2} + \frac{z^2 - z}{\sqrt{2z - z^2}} \right] d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_\epsilon^{2-\epsilon} \frac{z}{\sqrt{1 - (z-1)^2}} dz \\ &= 2\pi \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= 2\pi \left[ \arcsin t - \sqrt{1-t^2} \right]_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \\ &= 4\pi \arcsin(1 - \epsilon). \end{aligned}$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin(1 - \epsilon) = 2\pi^2.$$

En alternativ lösning är att tillämpa Gauss sats, men vi måste ändå när flödet genom  $S$  via ett gränsvärde. Till exempel kan vi tillämpa Gauss sats på volymen  $V_\epsilon$  mellan

$$S'_\epsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}\}$$

och

$$C_\epsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \epsilon^2, 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}\}.$$

Därmed är

$$\iint_{S'_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_{V_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz - \iint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

och

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{S'_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma.$$

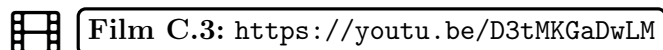
Se uppgift 6 från tentan den 21:e oktober 2019. □

**Exempel C.2.** Beräkna flödet av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

genom  $S = \{(x, y, z) : x = y^2 + z^2, x \leq 1\}$  orienterad så att  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{i} < 0$ .

Lösning.



Se uppgift 6 från tentan den 23:e oktober 2010. □

## C.2 Divergens i andra koordinatsystem



Film C.4: <https://youtu.be/WI23Tut4B0M>

### Cylindriska koordinater

Kom ihåg det cylindriska koordinatsystemet. Transformeringen mellan det och det kartesiska koordinatsystemet ges av

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

Motsvarande enhetsvektorna  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$  finns det  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  och  $\mathbf{e}_z$ :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}\end{aligned}\tag{C.1}$$

Observera att till skillnad från  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  och  $\mathbf{k}$  som inte beror på  $x$ ,  $y$  och  $z$  beror  $\mathbf{e}_\rho$  och  $\mathbf{e}_\varphi$  på koordinaten  $\varphi$ .

För en vektorfält  $\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = F_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + F_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + F_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z$  som ges i cylindriska koordinater är divergensen

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\tag{C.2}$$

### Sfäriska (eller rympolära) koordinater

Kom också ihåg sfäriska koordinater. Transformeringen mellan det och kartesiska koordinatsystemet ges av

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Motsvarande enhetsvektorna är:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

För en vektorfält  $\mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = F_r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + F_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$  som ges i cylindriska koordinater är divergensen

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

<sup>1</sup>Alternativ notation:  $\mathbf{e}_\rho = \hat{\rho}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \hat{\varphi}$  och  $\mathbf{e}_z = \hat{z}$

<sup>2</sup>Alternativ notation:  $\mathbf{e}_r = \hat{r}$ ,  $\mathbf{e}_\theta = \hat{\theta}$  och  $\mathbf{e}_\varphi = \hat{\varphi}$

## Lektion C.1

- I föreläsningen har vi beräknat flödet genom två sidor av en "cylindrisk rättblock" för att visa första termen i formeln (C.2) för divergens. Använd samma metod på de andra fyra sidor för att göra färdigt beviset av (C.2).

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 4.19
- 4.22
- 4.23
- 4.25
- 4.26
- 8.2