Modul D

Fysikaliskt arbete, kurvintegraler och Greens formel

Föreläsning D

Ramgard kapitel 4 och avsnitt 7.1–7.2.

D.1 Linjeintegraler: definitioner

Utifrån *fysikaliskt arbete* motiverar vi en definition för ett par linjeintegraler. Först för ett skalärfält:

Film D.1: `https://youtu.be/2qC-76pFVJs`

Vi definierar linjeintegraler på *orienterade* kurvor. En kurva sägs vara *orienterad* när vi har försett den men en positiv genomloppsriktning.

Definition D.1. *Integralen av ett skalärfält f över en orienterad linje L definieras som*

$$\int_L f\,ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(u))|\mathbf{r}'(u)|du$$

där $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ är en kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar parametrisering av kurvan L. Här måste f:s definitionsmängd förstås innehålla $L \subseteq \mathbf{R}^n$.

Från definition D.1 kan vi definierar arbetet som utförs av ett vektorfält längs en kurva L.

Film D.2: `https://youtu.be/j-qMnutMeL0`

Om $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ är en parametrisering av en kurva L vars derivata $\mathbf{r}'$ är aldrig noll vet vi att $\widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{r}'(u)/|\mathbf{r}'(u)|$ är en enhetstangentvektor till kurvan i punkten $\mathbf{r}(u)$ på kurvan. Därför kan vi utifrån definition D.1 beräkna att det arbete som utförs av ett vektorfält $\mathbf{F}$ längs L är

$$\int_L \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{t}}\,ds \underset{\substack{\uparrow\\ \text{definition D.1}}}{=} \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(u))\cdot\frac{\mathbf{r}'(u)}{|\mathbf{r}'(u)|}|\mathbf{r}'(u)|du = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(u))\cdot\mathbf{r}'(u)du.$$

D.2 Linjeintegraler: exempel

Alternativ notation för arbete:

$$\int_L \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{t}}\, ds = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L (F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz)$$

där vektorfältet $\mathbf{F}$ har komponenterna (F_1, F_2, F_3).

Film D.3: `https://youtu.be/QmHaxWtcGpk`

Uppgift D.2. *Beräkna*

$$\int_L -ydx + xdy + dz$$

där L ges av $\mathbf{r}\colon [0,1] \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(u) = (\cos u, 2\sin u, 2u)$.

Lösning. Vi löser uppgiften i följande videoklipp:

Film D.4: `https://youtu.be/x9dkgQSNQYE`

□

D.3 Greens formel

Vi kallar en kurva L *styckvis glatt* om den har en parametrisering som är kontinuerlig och styckvis kontinuerligt deriverbar. En sluten kurva sägs vara *orienterad moturs* eller *orienterad medurs* om den försedda positiva genomloppsriktningen är moturs respektive medurs. I fortsättningen antas varje vald parametrisering $\mathbf{r}(u)$ vara konsekvent med kurvans orientering, det vill säga att växande u-värden svarar mot rörelse i positiv riktning längs L.

Sats D.3 (Greens formel)**.** *Låt $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ vara två funktioner definierade och kontinuerligt deriverbara i området $D \subset \mathbf{R}^2$. Anta att D:s randkurva L är sluten styckvis glatt kurva som är orienterad moturs. Då är*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

Film D.5: `https://youtu.be/pE1p6B_Jymw`

Uppgift D.4. *Anta att ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ har en sluten styckvis glatt och orienterad randkurva L. Bevisa med hjälp av Green's formel att arean av ett område D ges av formeln*

$$\frac{1}{2} \int_L (-ydx + xdy)$$

där L ges av $\mathbf{r}\colon [0,1] \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{r}(u) = (\cos u, 2\sin u, 2u)$.

Lösning. Vi löser uppgiften i följande videoklipp:

Film D.6: `https://youtu.be/OOVpGQxqQR4`

□

Lektion D.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 5.1
- 5.2
- 5.3
- 5.4
- 5.5
- 5.6

Lektion D.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 5.7
- 5.8
- 5.9
- 5.11
- 5.13
- 5.14
- 5.15