Modul E

Rotation och Stokes sats

Föreläsning E

Ramgard kapitel 7.

E.1 Rotation

I första videoklipp motiverar vi definitionen av rotation utifrån en onskamål att mäta hur mycket ett vektorfält roterar i ett utvalda plan

Film E.1: `https://youtu.be/Wp4azwdZHrs`

Här betonar vi skillnaden mellan randkuror vi betraktar här jämfört med begreppet av rand från flervariabelanalys. Randkurvan av ett områd i planet stämmer överens med det vi kallade för områdets rand i flervariabelanalys, men nu börjar vi pratar om randkurvor till ytor i $\mathbf{R}^3$ och då är de olika begrepp. Enligt definitionen från flervariabelanalys är hela ytan en del av en ytas rand, men om vi jämför en yta med ett blad papper är randkurvan bara bladets rand.

Film E.2: `https://youtu.be/PcqVOJG2VXI`

Med hjälp från Greens formeln beräknar vi en formel för rotation i det kartesiska koordinatsystemet.

Film E.3: `https://youtu.be/B8tXEk3hJNO`

Formeln är

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)
\end{aligned}
$$

där $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Istället för att spela in en videoklipp om hur man kan räkna med formeln räknar jag lite här i texten. Se också avsnitt A.4.

Exampel E.1. *Beräkna* $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ *i följande fall:*

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-y}\mathbf{i} + e^{-z}\mathbf{j} + e^{-x}\mathbf{k}$*; och*

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xz\mathbf{i} - x^2\mathbf{k}$.

Lösning. (a) Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-y} & e^{-z} & e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial e^{-x}}{\partial y} - \frac{\partial e^{-z}}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial e^{-y}}{\partial z} - \frac{\partial e^{-x}}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial e^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial e^{-y}}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= e^{-z}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + e^{-y}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

(b) Vi räknar också att

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xz & 0 & -x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(0)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(3xz)}{\partial z} - \frac{\partial(-x^2)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(3xz)}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= 5x\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

□

Om du vill prova ett par exempel kan du till exempel prova **NH:** 1.11 och 1.12. Även 1.14 kan vara rolig.

E.2 Stokes sats

Först motiverar vi satsen med någon slags bevis:

Film E.4: `https://youtu.be/ZNVw52SAuDA`

Sen går vi igenom ett par exempel. Först där vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i hela $\mathbf{R}^3$:

Film E.5: `https://youtu.be/vyzaJ7zLMCk`

Och sen där vektorfältet är odefinierad längs z-axeln. I sådana fall får vi inte tillämpa Stokes sats till ytor som skär z-axeln. Vi upptäcker att en yta som har en randkurva med två komponenter kan vara till nytta:

Film E.6: `https://youtu.be/DjVWJbwLWXs`

Lektion E.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 6.1
- 6.2
- 6.3
- 6.5
- 6.6
- 6.8
- 6.10

Lektion E.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 6.11
- 6.16
- 6.17
- 6.18
- 6.19